
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ: ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Κεφάλαιο 1. Μιγαδικές Συναρτήσεις.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy. \quad |e^z| = e^x.$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

$$\log z = \log r + i\theta, \quad r = |z|, \quad \theta = \operatorname{Arg} z \text{ το όρισμα } z = x + iy \\ -\pi < \theta \leq \pi.$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Θεώρημα. (του Laurent)

Εστω c_1, c_2 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο z_0 και ακτίνες r_1, r_2 αντιστοίχως. (μπορεί $r_1 = 0$, είτε $r_2 = +\infty$) Υποθέτουμε ότι η $f(z)$ είναι μονότιμη και αναλυτική στον δακτύλιο

$$R = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2 \}.$$

Τότε η $f(z)$ μπορεί να γραφτεί κατά ένα μόνο τρόπο ως

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \dots + a_{-2} (z - z_0)^{-2} + a_{-1} (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z - z_0)^1 + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \text{όπου} \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου C οποιαδήποτε καμπύλη μεταξύ των c_1 και c_2 .

$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0 \implies z_0$ πόλος τάξεως k .

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots)$$

όπου $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ εάν το z_0 είναι απλός πόλος (τάξεως 1).

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right)$$

εάν το z_0 είναι πόλος τάξεως k .

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων.

1. $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$, F συνεχής ως προς t

Με $z = e^{it} = \cos t + i \sin t \implies \bar{z} = z^{-1} = \cos t - i \sin t \implies$

$$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin t = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad dt = \frac{1}{iz} dz, \quad \text{Αρα}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \oint_C F\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz,$$

Όπου C ο κύκλος $c: z(t) = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Υποθέτουμε:

- A. η $\frac{h(x)}{g(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, και τα πολυώνυμα h, g έχουν πραγματικούς συντελεστές
- B. το $g(x)$ έχει στο άνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{C}$ τις μή πραγματικές ρίζες $z_1, z_2, \dots, z_n$.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} dx$ όπου

(1). βαθμός $h(x) \leq$ βαθμός $g(x) - 2$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)}, z_k \right).$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx, \quad a > 0.$$

(1). βαθμός $h(x) \leq \text{βαθμός } g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, z_k \right).$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx, \quad a > 0.$$

(1). βαθμός $h(x) \leq \text{βαθμός } g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ έχει απλές πραγματικές ρίζες, $x_1, x_2, \dots, x_m$

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx = \pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, x_k \right) + 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, z_k \right)$$

Κεφάλαιο 2. Σειρές Fourier και Μετασχηματισμοί Fourier.

Σειρές Fourier.

Σειρά (ή ανάπτυγμα) Fourier της f ως προς B

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

f Άρτια: $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$.

f Περιττή: $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$.

Μετασχηματισμός Fourier.

"Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier της $F(\omega)$

$$f(x) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega ,$$

(Μιγαδικός) Μετασχηματισμός Fourier της f ".

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt .$$

Ολοκληρωτική Παράσταση (ή Ολοκληρωτικό Ανάπτυγμα ή Ολοκλήρωμα) Fourier της f .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Με Αναδιανομή Συντελεστών έχουμε:

f Αρτία : Συνημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f .

$$B(\omega) = 0 \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

f Περιττή : Ημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f .

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Αν $L[f(t)] = F(s)$ και $L[g(t)] = G(s)$ τότε

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$L[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$$

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$L\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

$L^{-1}[F(s)] = f(t)$ αντιστροφος μετασχηματισμος Laplace

$$L[t^k f(t)] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} [L[f(t)]]$$

$$u_{\sigma}(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \sigma \\ 1 & \text{αν } t \geq \sigma \end{cases}, \quad \sigma \geq 0.$$

$$L[u_{\sigma}(t)] = \frac{e^{-s\sigma}}{s}$$

$$L[u_{\sigma}(t) f(t - \sigma)] = e^{-s\sigma} F(s) \quad \text{και} \quad L^{-1}[e^{-s\sigma} F(s)] = u_{\sigma}(t) f(t - \sigma)$$

$$L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0)$$

$$L[f''(t)] = s^2 \cdot L[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0)$$

.....

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot L[f(t)] - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $f(x), g(x)$: $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$, όπου

$f(x), g(x)$ τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις.

$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)] \cdot L[g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Ο παρακάτω πίνακας συμπεριλαμβάνει τους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων συναρτήσεων, που εμφανίζονται συχνά στην πράξη.

$f(t)$	$L[f(t)] = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{bt}	$\frac{1}{(s-b)}, \quad s > b$
$t^n e^{bt}, n=1,2,\dots$	$\frac{n!}{(s-b)^{n+1}}, s > b$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
$e^{bt} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{[(s-b)^2 + \omega^2]}$
$e^{bt} \cos \omega t$	$\frac{(s-b)}{[(s-b)^2 + \omega^2]}$
$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{(s^2 - \beta^2)}$
$\cosh \beta t$	$\frac{s}{(s^2 - \beta^2)}$
$e^{\gamma t} \sinh \beta t$	$\frac{\beta}{[(s-\gamma)^2 - \beta^2]}$
$e^{\gamma t} \cosh \beta t$	$\frac{(s-\gamma)}{[(s-\gamma)^2 - \beta^2]}$
$t \sinh \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2 - \beta^2)^2}$
$t \cosh \beta t$	$\frac{(s^2 + \beta^2)}{(s^2 - \beta^2)^2}$