

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Ορισμός Ένα σύνολο n γραμμικών ΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + \beta_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + \beta_2(x) \\ \vdots &= \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + \beta_n(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

καλείται **σύστημα n μη ομογενών γραμμικών ΔΕ 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές** ως προς τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, όπου $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, σταθερές και $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κοινό διάστημα I .

Αν $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x) = 0$, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές**.

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Ένα τέτοιο σύστημα με τη βοήθεια πινάκων γράφεται στη μορφή

$$Y' = AY + B$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$Y' = AY.$$

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Θεώρημα Η γενική λύση του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος ΔE
 $Y' = AY + B$, είναι της μορφής

$$Y(x) = Y_{ομ}(x) + Y_{\mu}(x)$$

όπου $Y_{ομ}(x)$ είναι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς $Y' = AY$
και $Y_{\mu}(x)$ είναι μία μερική λύση του.

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Σύμφωνα με τη μέθοδο πινάκων, η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος του (3.2) προκύπτει ως εξής:

- Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A .
- ο Αν ο A έχει απλές ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_i, i = 1, 2, \dots, n$, τότε η γενική λύση του (3.2) είναι
$$Y(x) = c_1 \vec{u}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \vec{u}_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \vec{u}_n e^{\lambda_n x}.$$
- ο Αν ο A έχει μία διπλή ιδιοτιμή $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ και σε αυτήν αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{u}_i, i = 1, 2$, τότε προκύπτουν οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις
$$Y_{i1}(x) = \vec{u}_{i1} e^{\lambda_i x} \quad \text{και} \quad Y_{i2}(x) = \vec{u}_{i2} x e^{\lambda_i x}.$$
- ο Αν ο A έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_i = k \pm mi$, τότε σε αυτές αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις
$$Y_{i1}(x) = \vec{u}_i e^{kx} \cos mx, \quad Y_{i2}(x) = \vec{u}_i e^{kx} \sin mx \quad (\text{λόγω της } Y_i(x) = \vec{u}_i e^{(k+mi)x}).$$

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Για να βρούμε μία μερική λύση του συστ. (3.2), εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω ότι το B είναι της μορφής $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} e^{kx}$. Τότε

Ο Αν το k δεν είναι ιδιοτιμή του A , τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$Y_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} e^{kx}.$$

Ο Αν το k είναι ιδιοτιμή του A (πολλαπλότητας q), τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx},$$

όπου $R_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού q .

Δ.3.2_Συστήματα_μη_ομογενών_γραμμικών_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Έστω τώρα ότι το B είναι της μορφής $B = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{kx}$,

όπου $P_i(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n . Τότε

Αν το k δεν είναι ιδιοτιμή του A ,
τότε αναζητούμε μερική λύση της
μορφής

$$Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx}.$$

όπου $R_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού n .

Αν το k είναι ιδιοτιμή του A
(πολλαπλότητας q), τότε ανα-
ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$Y_\mu = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} e^{kx},$$

όπου $R_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n+q$