

## Δ.2.2\_Ομογενείς\_γραμμικές\_ΔΕ\_με\_σταθερούς\_συντελεστές

Πρόταση Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης με σταθερούς συντελεστές ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \quad (1)$$

όπου  $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ .

Η γενική λύση της (1) προκύπτει ως εξής:

- Λύνουμε την αντίστοιχη **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0. \quad (2)$$

- Αν η (2) έχει δύο ρίζες  $\omega_1 \neq \omega_2 \in \mathbb{R}$ , τότε η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{\omega_1 x} + c_2 e^{\omega_2 x}.$$

- Αν η (2) έχει δύο ρίζες  $\omega_1 = \omega_2 \in \mathbb{R}$ , τότε η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\omega_1 x}.$$

- Αν η (2) έχει δύο ρίζες  $k \pm mi \in \mathbb{C}$ , τότε η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = e^{kx} (c_1 \cos mx + c_2 \sin mx).$$

## Δ.2.2\_Ομογενείς\_γραμμικές\_ΔΕ\_με\_σταθερούς\_συντελεστές

Πρόταση Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξης με σταθερούς συντελεστές ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \quad (3)$$

όπου  $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ .

Η γενική λύση της (3) προκύπτει ως εξής:

## Δ.2.2\_Ομογενείς\_γραμμικές\_ΔΕ\_με\_σταθερούς\_συντελεστές

Λύνουμε την αντίστοιχη **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0. \quad (4)$$

- Σε κάθε απλή ρίζα  $\omega \in \mathbb{R}$  της (4), αντιστοιχεί η μερική λύση  $y(x) = e^{\omega x}$ .
- Σε κάθε διπλή ρίζα  $\omega \in \mathbb{R}$  της (4), αντιστοιχούν οι μερικές λύσεις  $y_1(x) = e^{\omega x}$ ,  $y_2(x) = x e^{\omega x}$ .
- Σε κάθε ρίζα  $\omega \in \mathbb{R}$  πολλαπλότητας  $n$  της (4), αντιστοιχούν οι λύσεις  $y_1(x) = e^{\omega x}$ ,  $y_2(x) = x e^{\omega x}$ ,  $\dots$ ,  $y_n(x) = x^{n-1} e^{\omega x}$ .
- Σε κάθε ζεύγος απλών συζυγών μιγ. ριζών  $k \pm mi \in \mathbb{C}$ , αντιστοιχούν  $y_1(x) = e^{kx} \cos mx$ ,  $y_2(x) = e^{kx} \sin mx$ .
- Σε κάθε ζεύγος διπλών συζυγών μιγ. ριζών  $k \pm mi \in \mathbb{C}$ , αντιστοιχούν  $y_1(x) = e^{kx} \cos mx$ ,  $y_2(x) = e^{kx} \sin mx$ ,  
 $y_3(x) = x e^{kx} \cos mx$ ,  $y_4(x) = x e^{kx} \sin mx$ .