

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Ορισμός Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξης με σταθερούς συντελεστές ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x). \quad (1)$$

όπου $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ και $f(x)$ δοθείσα πραγματική συνάρτηση.

Αν $f(x) = 0$, τότε η ΔΕ (1) καλείται ομογενής.

Θεώρημα Η γενική λύση της γραμμικής ΔΕ n τάξης (1) είναι

$$y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μ}(x)$$

όπου $y_{ομ}(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και

$y_{μ}(x)$ είναι μία μερική λύση της (1).

Η γενική λύση της (1) προκύπτει ως εξής με:

- Τη μέθοδο προσδιορισμού των σταθερών (ή μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών) και
- Τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών (αν $n = 2$)

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

- **Μέθοδος προσδιορισμού των σταθερών**

Αν το 2^ο μέλος της ΔΕ (1) είναι της μορφής

$$f(x) = P_n(x)e^{kx}$$

όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n .

○ Αν ο πραγματικός αριθμός $z = k$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ΔΕ (1), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = Q_n(x)e^{kx}$$

όπου $Q_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n .

○ Αν ο πραγματικός αριθμός $z = k$ είναι ρίζα πολλαπλότητας ρ της χαρακτ. εξίσωσης της ΔΕ (1), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = x^\rho Q_n(x)e^{kx}$$

όπου $Q_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n .

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Αν το 2^ο μέλος της ΔΕ (1) είναι της μορφής

$$f(x) = e^{kx} \left(P_{n_1}(x) \cos mx + P_{n_2}(x) \sin mx \right)$$

όπου $P_{n_1}(x), P_{n_2}(x)$ πολυώνυμα βαθμού n_1 και n_2 , αντίστοιχα.

- Αν ο μιγαδικός αριθμός $k+mi$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ΔΕ (1), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = e^{kx} \left(Q_n(x) \cos mx + R_n(x) \sin mx \right)$$

όπου $Q_n(x), R_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού $n = \max\{n_1, n_2\}$.

- Αν ο μιγαδικός αριθμός $k+mi$ είναι ρίζα πολλαπλότητας ρ της χαρακτ.εξίσωσης της ΔΕ (1), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = x^\rho e^{kx} \left(Q_n(x) \cos mx + R_n(x) \sin mx \right)$$

όπου $Q_n(x), R_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού $n = \max\{n_1, n_2\}$.

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

- Μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

η οποία, αν απαλείψαμε το συντελεστή της $y''(x)$ διαιρώντας με το a_2 , τότε θα είχε τη μορφή

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x). \quad (2)$$

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

Πρόταση Αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς της ΔΕ (2), τότε ζητούμε μία μερική λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

υπολογίζοντας τις παραγώγους $c_1'(x)$ και $c_2'(x)$ από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= f(x) \end{cases}.$$

Ολοκληρώνοντας τις $c_1'(x)$ και $c_2'(x)$, βρίσκουμε τις ζητούμενες συναρτήσεις $c_1(x)$ και $c_2(x)$.