

Δ.2.1_Γραμμικές_ΔΕ_ανώτερης_τάξης

Γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξης ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \quad (1)$$

Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξης ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (2)$$

Δ.2.1_Γραμμικές_ΔΕ_ανώτερης_τάξης

Το **πρόβλημα αρχικών τιμών** για μία ΔΕ n τάξης περιέχει n συνθήκες για τιμές της $y(x)$ και των παραγώγων της.

Π.χ. οι συνθήκες αυτές μπορεί να είναι οι τιμές

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad \dots, \quad y(x_n) = y_n,$$

της $y(x)$ σε n σημεία της $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Αν η ζητούμενη συνάρτηση $y(x)$ ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και οι αρχικές συνθήκες είναι οι τιμές της $y(x)$ ή των παραγώγων της στα άκρα του $[\alpha, \beta]$, π.χ. $y(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = 0$, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών λέγεται και **πρόβλημα συνοριακών τιμών**.

Δ.2.1_Γραμμικές_ΔΕ_ανώτερης_τάξης

Θεώρημα (Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας)

Αν οι $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής ΔΕ

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

τότε και οποιαδήποτε συνάρτηση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_k \text{ σταθερές}$$

είναι λύση της.

Αν $y_1(x)$ λύση της $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x)$

$$y_2(x) \text{ λύση της } a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_2(x)$$

$$y_k(x) \text{ λύση της } a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_k(x)$$

τότε και οποιαδήποτε συνάρτηση

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_k \text{ σταθερές}$$

είναι λύση της

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x).$$

Δ.2.1_Γραμμικές_ΔΕ_ανώτερης_τάξης

Θεώρημα Το σύνολο των λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ τάξης n είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n , οπότε η γενική της λύση είναι της μορφής

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ σταθερές}$$

όπου οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της.

Πρόταση Αν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

τότε οι συναρτήσεις $y_1(x), \dots, y_n(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των $y_1(x), \dots, y_n(x)$.

Δ.2.1_Γραμμικές_ΔΕ_ανώτερης_τάξης

- Υποβιβασμός της τάξης

Αν γνωρίζουμε μία μερική λύση $y_1(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ μίας γραμμικής ΔΕ ως προς τη συνάρτηση $y(x)$, τότε με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$y(x) = y_1(x)z(x)$$

καταλήγουμε σε μία ΔΕ μίας τάξης μικρότερης της τάξης της αρχικής.