

Δ.1.3_Ομογενείς_Διαφορικές_Εξισώσεις

Μια ΔΕ λέγεται **ομογενής** αν $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ και $f(ax, ay) = f(x, y)$,

όπου f τυχαία συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}$ δηλαδή αν είναι της μορφής

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (1)$$

Έστω η παραπάνω ομογενής ΔΕ, όπου f αναγνωρίσιμη συνάρτηση.

Θέτοντας $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ προκύπτει $y = xz$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xz) = z + x \frac{dz}{dx}.$$

Οπότε η ΔΕ (1) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z + x \frac{dz}{dx} = f(z) \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = f(z) - z \Rightarrow \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

η οποία είναι διαχωρίσιμη ΔΕ ως προς z από όπου βρίσκουμε την y .

Δ.1.3_Ομογενείς_Διαφορικές_Εξισώσεις

Αν μία ΔΕ είναι της μορφής $\frac{dy}{dx} = f(ax + \beta y + \gamma)$
τότε με την αντικατάσταση $z = ax + \beta y + \gamma$ προκύπτει
$$\frac{dz}{dx} = a + \beta \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + \beta f(z) \Rightarrow \frac{dz}{a + \beta f(z)} = dx$$

η οποία είναι διαχωρίσιμη ΔΕ ως προς z από όπου βρίσκουμε την y .

Αν η ΔΕ της μορφής $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + \beta_1y + \gamma_1}{a_2x + \beta_2y + \gamma_2}\right)$
γράφεται ως $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + \beta y + \gamma_1}{\lambda(ax + \beta y) + \gamma_2}\right)$
τότε με την αντικατάσταση $u = ax + \beta y$
μετασχηματίζεται σε ομογενή ΔΕ.