

# Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου - ΣΑΕ



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΡΑΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ  
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
& ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



## TIME RESPONSE ANALYSIS



## Κεφάλαιο 4 Χρονική Απόκριση Συστημάτων



# Χρονική Απόκριση Συστημάτων

- Η χρονική απόκριση αποτελεί ένα σημαντικό θέμα ανάλυσης και συνίσταται στην εύρεση και γραφική απεικόνιση της μεταβολής της εξόδου (απόκρισης) ενός συστήματος, συναρτήσει του χρόνου.
- Όπως είναι ήδη γνωστό, σε μια περιγραφή στο πεδίο του χρόνου όλα τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν το σύστημα (είσοδοι, έξοδοι, μεταβλητές κατάστασης) είναι συναρτήσεις του χρόνου.
- Σε πολλές περιπτώσεις, η έξοδος του συστήματος πρέπει να «ακολουθεί» την είσοδο όσο το δυνατόν πιο πιστά.
- Ως είσοδος τότε λαμβάνεται ένα πρότυπο σήμα που ισούται με την επιθυμητή έξοδο  $y_d(t)$ .
- Το σήμα αυτό συχνά ονομάζεται **είσοδος αναφοράς (reference input)** και τότε συμβολίζεται με  $r(t)$ .



# Μεταβατική & Μόνιμη Κατάσταση

- Η χρονική απόκριση ενός συστήματος χωρίζεται σε δύο μέρη: Τη μεταβατική απόκριση (μεταβατική κατάσταση) και τη μόνιμη απόκριση (μόνιμη κατάσταση).
- Η μεταβατική απόκριση ορίζεται ως το τμήμα της χρονικής απόκρισης που μηδενίζεται καθώς αυξάνει ο χρόνος.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\mu\epsilon\tau}(t) = 0$$

- Η μόνιμη απόκριση είναι το τμήμα της απόκρισης που παραμένει μετά τον μηδενισμό της μεταβατικής απόκρισης.

$$y_{\mu\omicron\nu}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

- Η μόνιμη απόκριση, συγκρινόμενη με την είσοδο αναφοράς δείχνει την ακρίβεια του συστήματος, δηλαδή, το κατά πόσον η έξοδος «ακολουθεί» την είσοδο. Η διαφορά των δύο σημάτων λέγεται σφάλμα μόνιμης κατάστασης.



# Συμπεριφορά στη μεταβατική κατάσταση

Για τη μεταβατική απόκριση ορίζονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

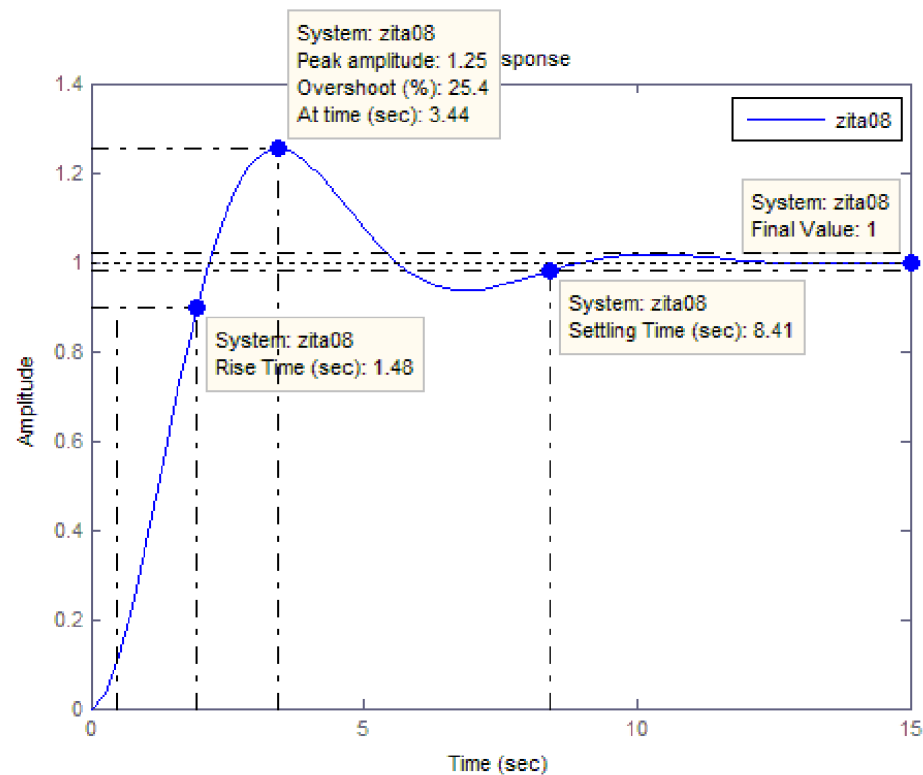
- Μέγιστη υπερέκταση (*overshoot*)  $\nu$  : η διαφορά μεταξύ της μέγιστης τιμής  $y_m$  και της τελικής τιμής  $y_f$  της  $y(t)$ .

$$\nu\% = 100 \times \frac{y_m - y_f}{y_f} \%$$

- Χρόνος καθυστέρησης (*delay time*)  $T_d$ : ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η  $y(t)$  στο μισό της τελικής τιμής της.
- Χρόνος ανύψωσης (*rise time*)  $T_r$  : ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η  $y(t)$  από το 10% στο 90% της τελικής τιμής της.
- Χρόνος αποκατάστασης (*settling time*)  $T_s$  : ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει και να παραμείνει η  $y(t)$  σε μια ορισμένη περιοχή κοντά στην τελική τιμή. Η περιοχή αυτή λαμβάνεται συνήθως από 2% έως 5% του πλάτους της τελικής τιμής  $y_f$ .



# Χαρακτηριστικά Μεταβατικής Κατάστασης



Απόκριση για μοναδιαία βηματική είσοδο



# Μεταβατική απόκριση συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης

- Το σύστημα έχει ένα πόλο στην τιμή  $-1/s$ .
- Θεωρούμε τη βηματική συνάρτηση ως είσοδο άρα  $R(s)=1/s$ .

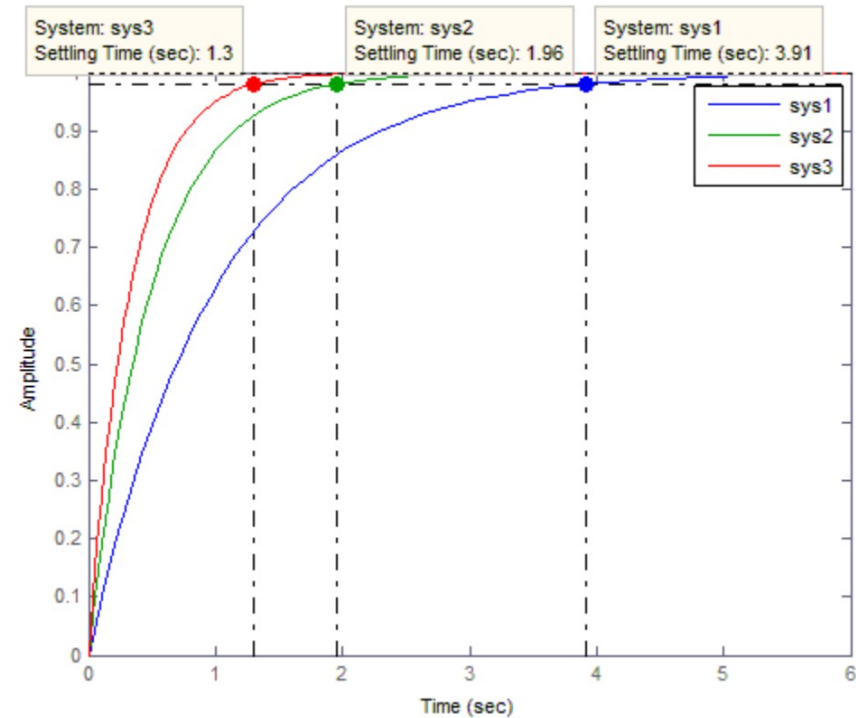
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = 1 - e^{(-1/T)t} = 1 - e^{-t/T} \quad \text{για } t \geq 0$$

$$y(0)=0, y(T)=1-e^{-1} \text{ και } y(t) \rightarrow 1 \text{ όταν } t \rightarrow \infty$$

$$Y(s) = \frac{\tau}{s+\tau} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\tau}, \tau=1/T$$



Χρονική απόκριση συστημάτων πρώτης τάξης με χρονικές σταθερές  $T=1$  (sys1),  $T=1/2$  (sys2) και  $T=1/3$  (sys3)

# Μεταβατική απόκριση συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης

Εξισώσεις κατάστασης  
(κανονικής μορφής φάσης)  
όπου  $\zeta$  και  $\omega_n$  σταθερές.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Για βηματική είσοδο έχουμε τη λύση

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t + \psi) & \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t \\ -\omega_n \sin \omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t & \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} \left\{ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t - \phi) \right\} \\ \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t) \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός Συνάρτησης Μεταφοράς

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix}, D = 0$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}$$



# Μεταβατική απόκριση συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Έχουμε Μοναδιαία Βηματική Είσοδο

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Με αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin\left[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t - \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}\right]$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση  $p(s)=0 \Rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p(s) = 0$  και της χρονικής απόκρισης  $y(t)$ .

Ρίζες Χαρακτηριστικής Εξίσωσης

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2} = -\alpha \pm j\omega$$

Η θέση των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο καθορίζονται από τις συντεταγμένες  $\alpha$  και  $\omega$ .

**Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ή πόλοι του συστήματος.**





# Μεταβατική απόκριση συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης

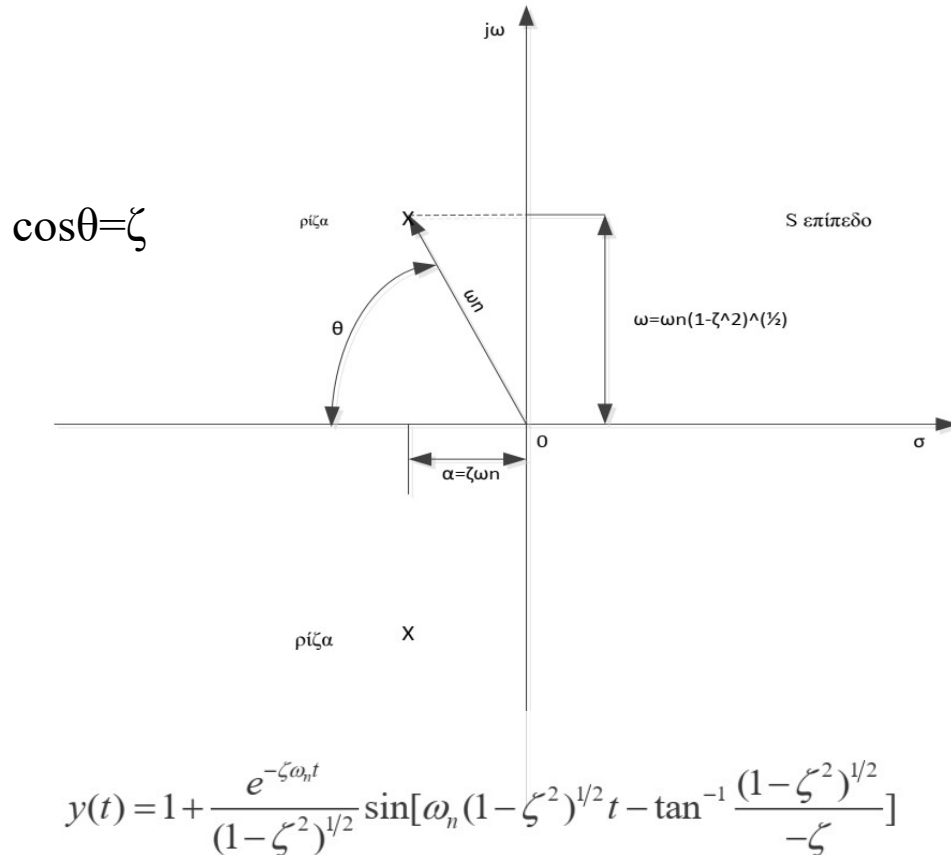
- Οι σταθερές  $\zeta$  και  $\omega_n$  επηρεάζουν τις θέσεις των πόλων επάνω στο μιγαδικό επίπεδο.
- Το πραγματικό μέρος  $\alpha = \zeta\omega_n$  επηρεάζει τον εκθετικό όρο της χρονικής απόκρισης και ειδικότερα καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το πλάτος της  $y(t)$  (**α σταθερά απόσβεσης**).
- Για  $\zeta = 1$ , οι δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πραγματικές και ίσες. Τότε  $\alpha = \omega_n$  και  $y(t) = 1$ . Η απόσβεση του συστήματος τότε λέγεται **κρίσιμη**.
- Για  $\zeta = 0$ , έχουμε δύο φανταστικές ρίζες. Η απόκριση είναι ημιτονοειδής με  $\omega_n = \omega$ .
- Η σταθερά  $\zeta$  λέγεται **συντελεστής απόσβεσης** και η  $\omega_n$  **φυσική συχνότητα του συστήματος**.

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin\left[\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t - \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}\right]$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} = -\alpha \pm j\omega$$



# Μεταβατική απόκριση συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης



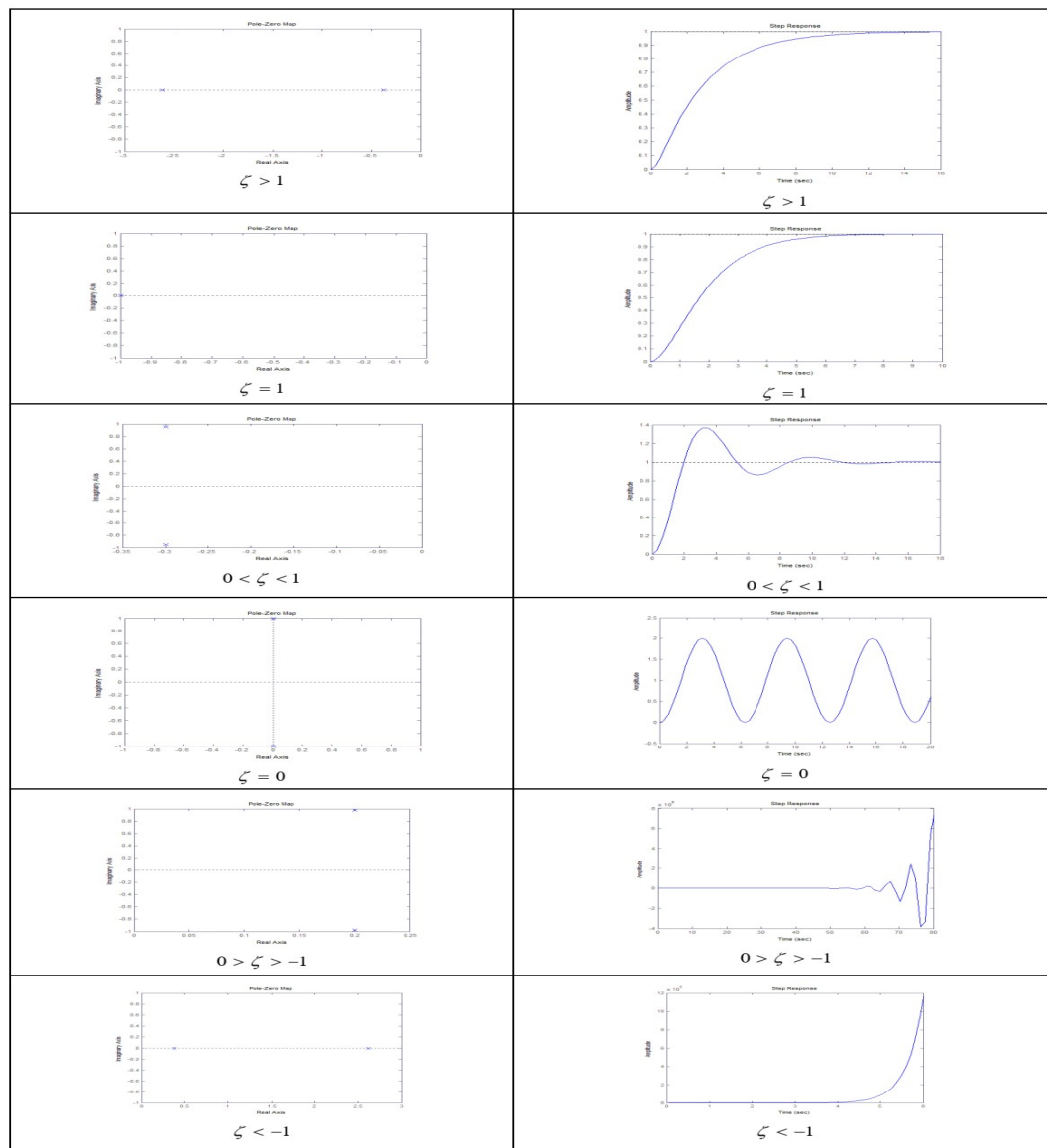
- Το αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο αντιστοιχεί σε θετική απόσβεση (η σταθερά απόσβεσης είναι θετική), ενώ το δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο αντιστοιχεί σε αρνητική απόσβεση.
- Ο άξονας των φανταστικών αριθμών αντιστοιχεί σε μηδενική απόσβεση και οδηγεί σε ημιτονοειδής απόκριση ( $\alpha = 0$ ,  $\zeta = 0$ ).
- Όταν η απόσβεση είναι θετική, η βηματική απόκριση φτάνει στη σταθερή τελική τιμή της αφού η μεταβατική απόκριση μειώνεται εκθετικά ανάλογα με τον όρο  $e^{-\zeta \omega_n t}$ .
- Αρνητική απόσβεση αντιστοιχεί σε αύξουσα, μη φραγμένη απόκριση.
- Τέλος, μηδενική απόσβεση αντιστοιχεί σε συντηρούμενη ημιτονοειδή ταλάντωση.
- Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις ορίζονται ως ασταθείς, για γραμμικά συστήματα.

# Μεταβατική απόκριση

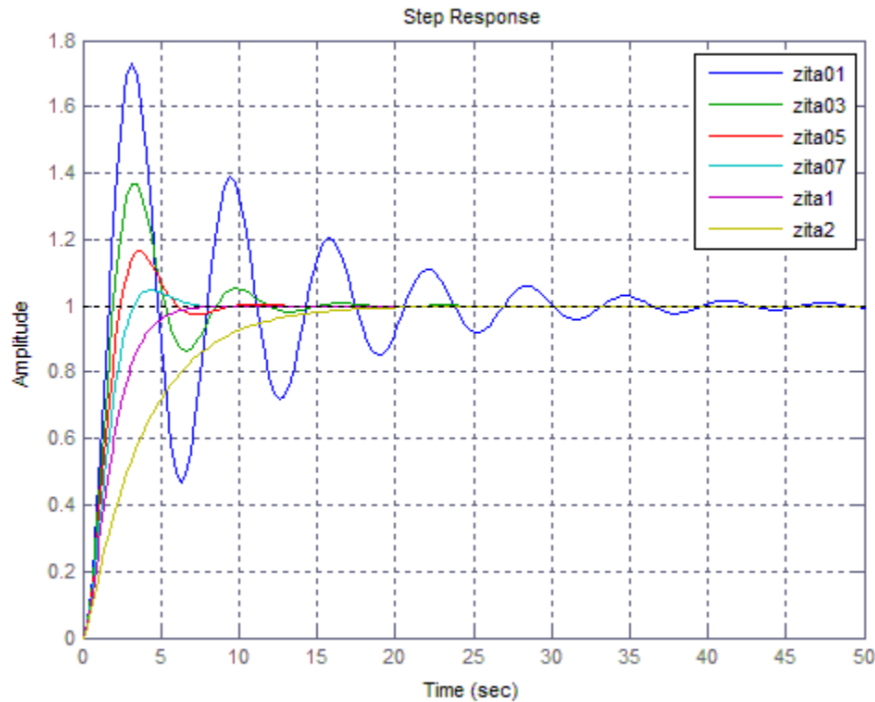
| Συντελεστής απόσβεσης | Ρίζες χαρακτηρ. εξίσωσης                                  | Φαινόμενο              |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------|
| $0 < \zeta < 1$       | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$ | Υποαπόσβεση            |
| $\zeta = 1$           | $s_{1,2} = -\omega_n$                                     | Κρίσιμη απόσβεση       |
| $\zeta > 1$           | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n(\zeta^2-1)^{1/2}$  | Υπεραπόσβεση           |
| $\zeta = 0$           | $s_{1,2} = \pm j\omega_n$                                 | Συντηρούμενη ταλάντωση |
| $\zeta < 0$           | $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}$ | Αρνητική απόσβεση      |

Στις πρακτικές εφαρμογές τα συστήματα πρέπει να είναι **ευσταθή**.

Συνεπώς ενδιαφερόμαστε μόνο για περιπτώσεις με  $\zeta > 0$ .



# Μεταβατική απόκριση συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης



- Οι ταλαντώσεις της απόκρισης αυξάνουν, καθώς ο συντελεστής απόσβεσης  $\zeta$  ελαττώνεται.
- Όταν  $\zeta > 1$  το σύστημα δεν εμφανίζει υπερύψωση.

# Υπερύψωση στη Μόνιμη Κατάσταση

- Η σχέση μεταξύ του συντελεστή απόσβεσης και της υπερύψωσης προκύπτει εξισώνοντας με μηδέν την παράγωγο της  $y(t)$  ως προς τον χρόνο.

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin\left[\omega_n(1-\zeta^2)^{1/2}t - \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}\right]$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \sin(\omega_n t - \phi) + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{(1-\zeta^2)^{1/2}} \omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} \cos(\omega_n t - \phi) = 0$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{-\zeta}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{(1-\zeta^2)^{1/2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t = 0$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2} t = n\pi$$

Χρόνος μέγιστης  
υπερύψωσης ( $n=1$ )

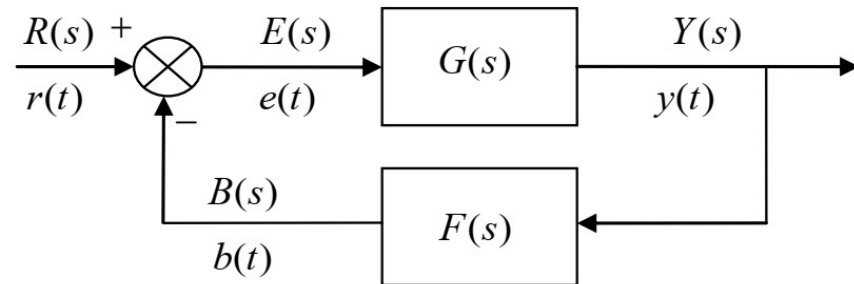
$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n (1-\zeta^2)^{1/2}}$$

Υπερύψωση

$$y_m = 1 + e^{-\pi\zeta/(1-\zeta^2)^{1/2}}$$

# Ανάλυση σφάλματος στη Μόνιμη Κατάσταση

- Στόχος σε προβλήματα ελέγχου είναι η επίτευξη μηδενικού σφάλματος ή έστω η διατήρησή του σε επιθυμητά χαμηλές τιμές.
- Αν η είσοδος αναφοράς και η έξοδος είναι σήματα της ίδιας φύσης και τάξης μεγέθους, τότε το σφάλμα είναι απλά η διαφορά τους.
- Ωστόσο, μερικές φορές είναι αδύνατο ή ασύμφορο να χρησιμοποιηθεί μια είσοδος αναφοράς του ίδιου επιπέδου ή της ίδιας διάστασης με την έξοδο.
- Στον βρόχο ανάδρασης ενσωματώνεται μια μονάδα (μετατροπέας) που εξασφαλίζει ότι η αφαίρεση αφορά σήματα της ίδιας φύσης και διάστασης.



$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - F(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Το θεώρημα της τελικής τιμής του  
μετασχηματισμού Laplace

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

# Ανάλυση σφάλματος στη Μόνιμη Κατάσταση

- Θεώρημα Τελικής Τιμής του μετασχηματισμού Laplace

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s)}$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου παραγοντοποιημένη με περιγραφή πόλων & μηδενικών

$$G(s)F(s) = \frac{K(1 + T_{b_1}s)(1 + T_{b_2}s)\dots(1 + T_{b_m}s)}{s^j(1 + T_{a_1}s)(1 + T_{a_2}s)\dots(1 + T_{a_n}s)}$$

- Ως **τύπος του συστήματος** ορίζεται ο **βαθμός πολλαπλότητας του πόλου της  $G(s)F(s)$  στο σημείο  $s=0$** . Στη συγκεκριμένη περίπτωση το σύστημα είναι τύπου  $j$ .
- Ο τύπος συστήματος επηρεάζει την τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης.



# Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με Είσοδο Βηματική συνάρτηση – Σφάλμα θέσης

- Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η βηματική συνάρτηση πλάτους  $A$ ,  $r(t)=Au(t)$  δηλαδή  $R(s)=A/s$ .

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s)}$$

|                                 |                                                |
|---------------------------------|------------------------------------------------|
| Σύστημα τύπου 0                 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{1 + K_p} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 1 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$                                |

Σταθερά Σφάλματος Θέσης:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)F(s)$

Προκύπτει ότι το σφάλμα θέσης θα είναι μηδενικό, μόνον όταν η σταθερά σφάλματος θέσης απειρίζεται.





# Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με είσοδο συνάρτηση αναρρίχησης– Σφάλμα ταχύτητας

- Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η συνάρτηση αναρρίχησης,  $r(t)=Atu(t)$  δηλαδή  $R(s)=A/s^2$ .

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^2)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s)}$$

|                                 |                                            |
|---------------------------------|--------------------------------------------|
| Σύστημα τύπου 0                 | $e_{ss}(t) \rightarrow \infty$             |
| Σύστημα τύπου 1                 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{K_v} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 2 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$                            |

Σταθερά Σφάλματος Ταχύτητας :  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)F(s)$

Για να μηδενιστεί το σφάλμα ταχύτητας θα πρέπει η σταθερά σφάλματος ταχύτητας να απειρίζεται.



# Σφάλμα μόνιμης κατάστασης με είσοδο παραβολική συνάρτηση – Σφάλμα επιτάχυνσης

- Έστω ότι η είσοδος αναφοράς του συστήματος είναι η παραβολική συνάρτηση,  $r(t)=0,5 \cdot A t^2 u(t)$  δηλαδή  $R(s)=A/s^3$ .

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)F(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^3)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s)}$$

|                                 |                                            |
|---------------------------------|--------------------------------------------|
| Σύστημα τύπου 0 ή 1             | $e_{ss}(t) \rightarrow \infty$             |
| Σύστημα τύπου 2                 | $e_{ss}(t) = \frac{A}{K_a} = \text{σταθ.}$ |
| Σύστημα τύπου 3 και μεγαλύτερου | $e_{ss}(t) = 0$                            |

Σταθερά Σφάλματος επιτάχυνσης :  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)F(s)$

Για να μηδενιστεί το σφάλμα επιτάχυνσης θα πρέπει η σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης να απειρίζεται.



# Μέθοδος Σειράς Σφάλματος

Μειονέκτημα των σταθερών σφάλματος είναι ότι δεν δίνουν καμία πληροφορία για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, όταν οι είσοδοι είναι διαφορετικές από αυτές που έχουν αναφερθεί.

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad E(s) = W(s)R(s)$$

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor

$$r(t - \tau) = r(t) - \tau r^{(1)}(t) + \frac{\tau^2}{2!} r^{(2)}(t) - \frac{\tau^3}{3!} r^{(3)}(t) + \dots$$

$$e(t) = r(t) \int_0^t w(\tau) d\tau - r^{(1)}(t) \int_0^t \tau w(\tau) d\tau + r^{(2)}(t) \int_0^t \frac{\tau^2}{2!} w(\tau) d\tau - r^{(3)}(t) \int_0^t \frac{\tau^3}{3!} w(\tau) d\tau + \dots$$

- Συνάρτηση Μεταφοράς Σφάλματος

$$W(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της  $E(s)$   
ως συνελεκτικό ολοκλήρωμα

$$e(t) = \int_{-\infty}^t w(t) r(t - \tau) d\tau$$



# Μέθοδος Σειράς Σφάλματος

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

$$e_{ss}(t) = r_{ss}(t) \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau - r_{ss}^{(1)}(t) \int_0^{\infty} \tau w(\tau) d\tau + r_{ss}^{(2)}(t) \int_0^{\infty} \frac{\tau^2}{2!} w(\tau) d\tau - r_{ss}^{(3)}(t) \int_0^{\infty} \frac{\tau^3}{3!} w(\tau) d\tau + \dots$$

$$\text{όπου } r_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$$

$$e_{ss}(t) = C_0 r_{ss}(t) + C_1 r_{ss}^{(1)}(t) + \frac{C_2}{2!} r_{ss}^{(2)}(t) + \dots + \frac{C_n}{n!} r_{ss}^{(n)}(t) + \dots$$

$$C_0 = \int_0^{\infty} w(\tau) d\tau$$

$$C_1 = - \int_0^{\infty} \tau w(\tau) d\tau$$

$$C_2 = \int_0^{\infty} \tau^2 w(\tau) d\tau$$

$\vdots$

$$C_n = (-1)^n \int_0^{\infty} \tau^n w(\tau) d\tau$$



# Μέθοδος Σειράς Σφάλματος

## Σειρά σφάλματος

Τελικά ισχύει ότι:

$$e_{ss}(t) = C_0 r_{ss}(t) + C_1 r_{ss}^{(1)}(t) + \frac{C_2}{2!} r_{ss}^{(2)}(t) + \dots + \frac{C_n}{n!} r_{ss}^{(n)}(t) + \dots$$

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW(s)}{ds}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2 W(s)}{ds^2}$$

$\vdots$

$$C_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n W(s)}{ds^n}$$

συντελεστές σφάλματος:



# Μέθοδος Σειράς Σφάλματος – Παράδειγμα

Σύστημα Μοναδιαίας  
Ανατροφοδότησης

$$G(s) = \frac{K}{s+1}$$

Ζητούμενο είναι η Μεταβολή του σφάλματος μέχρι να φτάσει  
στη μόνιμη κατάσταση

$$W(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+1+K}$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{k}{(s+1+k)^2}$$

$$\frac{d^2W}{ds^2} = \frac{-2k}{(s+1+k)^3}$$

Οι συντελεστές σφάλματος είναι

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \frac{1}{1+K}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW(s)}{ds} = \frac{K}{(1+K)^2}$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2W(s)}{ds^2} = \frac{-2K}{(1+K)^3}$$

Η σειρά σφάλματος γράφεται

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} r_{ss}(t) + \frac{K}{(1+K)^2} r_{ss}^{(1)}(t) - \frac{K}{(1+K)^3} r_{ss}^{(2)}(t) + \dots$$



# Μέθοδος Σειράς Σφάλματος – Παράδειγμα

- Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση  $r(t)=u(t)$ . Όλες οι παράγωγοι της  $r_{ss}(t)$  είναι μηδενικές.

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} u(t)$$

- Συνάρτηση αναρρίχησης  $r(t)=tu(t)$ . Είναι  $r^{(1)}(t)=u(t)$  ενώ όλες οι παράγωγοι ανώτερης τάξης είναι μηδενικές. Το  $e(t)$  αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου.

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1+K} tu(t) + \frac{K}{(1+K)^2} u(t)$$

- Παραβολική συνάρτηση  $r(t)=0.5t^2u(t)$ . Είναι  $r^{(1)}(t)=tu(t)$ ,  $r^{(2)}(t)=u(t)$  και οι υπόλοιπες μηδενικές.

$$e_{ss}(t) = \left[ \frac{1}{1+K} \frac{t^2}{2} + \frac{K}{(1+K)^2} t - \frac{K}{(1+K)^3} \right] u(t)$$

