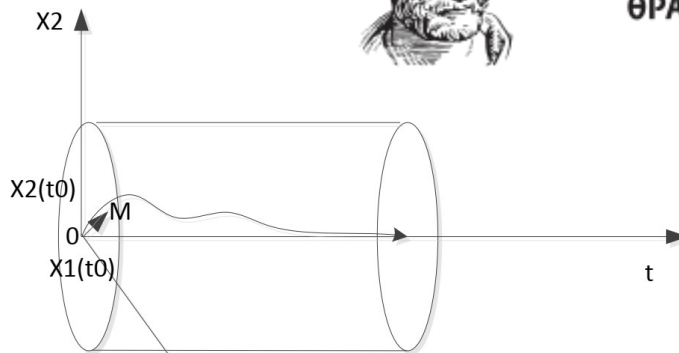
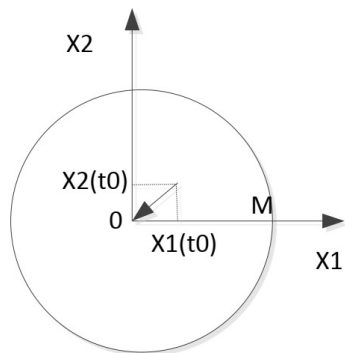


Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου - ΣΑΕ



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΡΑΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
& ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



Κεφάλαιο 5

Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων



Συσχετισμός των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (πόλων) με τη μεταβατική απόκριση

1. Οι ρίζες βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο: η μεταβατική απόκριση του συστήματος μηδενικής εισόδου (δηλαδή, όταν το σύστημα διεγείρεται μόνο από τις αρχικές του συνθήκες) μηδενίζεται, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.
2. Ένα ή περισσότερα ζεύγη ριζών βρίσκονται επάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών, αλλά δεν υπάρχουν ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο: η μεταβατική απόκριση μηδενικής εισόδου είναι ημιτονοειδής ταλάντωση σταθερού πλάτους.
3. Μία ή περισσότερες ρίζες βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο: η μεταβατική απόκριση του συστήματος μηδενικής εισόδου αυξάνει, ως προς το πλάτος, καθώς ο χρόνος αυξάνει.



Ευστάθεια

Η έννοια της ευστάθειας περιλαμβάνει, τόσο την απόλυτη, όσο και τη σχετική ευστάθεια.

- Η **απόλυτη ευστάθεια** αναφέρεται στο αν ένα σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές.
- Η **σχετική ευστάθεια** αναφέρεται στο «πόσο» ευσταθές είναι ένα σύστημα, δηλαδή πόσο εύκολα ή δύσκολα μεταπίπτει σε αστάθεια. Η σχετική ευστάθεια ποσοτικοποιείται με συγκεκριμένα μεγέθη που λέγονται περιθώρια ευστάθειας.



Ορισμός ευστάθειας για συστήματα μηδενικής εισόδου

Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα μηδενικής εισόδου λέγεται ευσταθές, αν για κάθε πεπερασμένη αρχική κατάσταση $x(t_0)$ υπάρχει ένας θετικός αριθμός M , που εξαρτάται από το $x(t_0)$, έτσι ώστε:

$$\|x(t)\| < M, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.3)$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (5.4)$$

όπου $\|x(t)\|$ είναι η νόρμα του διανύσματος κατάστασης $x(t)$.



Ορισμός ευστάθειας για συστήματα μη - μηδενικής εισόδου

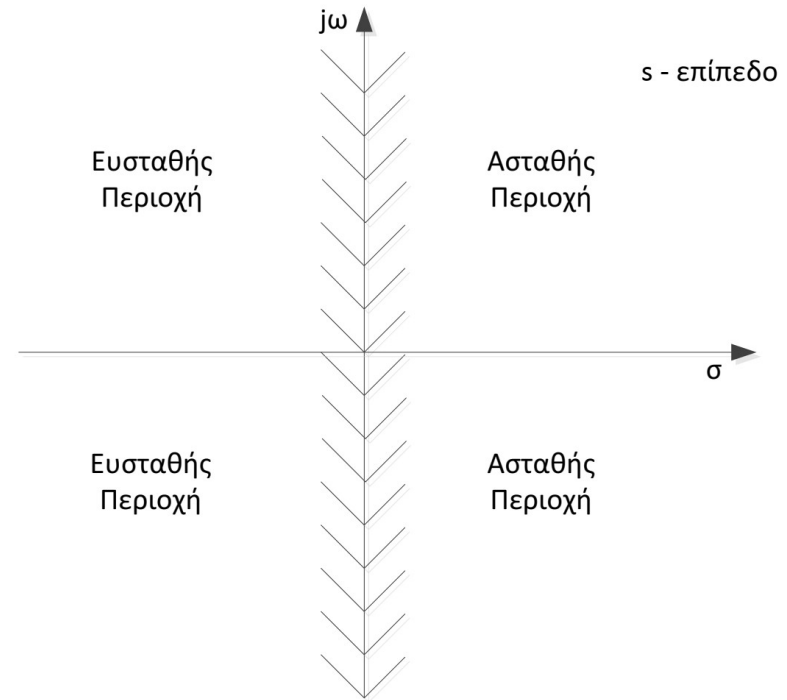
- Ένα σύστημα είναι ευσταθές, αν η έξοδός του είναι φραγμένη για κάθε φραγμένη είσοδο.

$$|u(t)| \leq N < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M < \infty, \quad \forall t \geq t_0$$



Ευσταθείς και ασταθείς περιοχές του μιγαδικού επιπέδου

Στην περίπτωση ευστάθειας μηδενικής εισόδου αλλά και φραγμένης εισόδου, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο.



Ευσταθείς και ασταθείς περιοχές του μιγαδικού επιπέδου



Μέθοδοι προσδιορισμού της ευστάθειας γραμμικών συστημάτων – Αλγεβρικά κριτήρια

Κριτήρια ευστάθειας:

Αλγεβρικά - εξετάζουν την απόλυτη ευστάθεια ενός συστήματος χωρίς να χρειάζεται η επίλυση της χαρακτηριστικής του εξίσωσης.

Εποπτικά - εξετάζουν τόσο την απόλυτη, όσο και τη σχετική ευστάθεια ενός συστήματος και βασίζονται σε κατάλληλα διαγράμματα.



Κριτήρια ευστάθειας

- **Κριτήρια Routh – Hurwitz:** Αλγεβρικές μέθοδοι που δίνουν πληροφορία για την απόλυτη ευστάθεια, εξετάζοντας αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, χωρίς όμως να υπολογίζουν τις ρίζες.
- **Κριτήριο Nyquist:** Εποπτική μέθοδος που εξετάζει την απόλυτη και τη σχετική ευστάθεια, εξετάζοντας τη συμπεριφορά του διαγράμματος Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.
- **Γεωμετρικός τρόπος των ριζών:** Είναι και αυτή μία εποπτική μέθοδος και βασίζεται στο διάγραμμα του γεωμετρικού τόπου των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλεται η σταθερά ενίσχυσης.
- **Διάγραμμα Bode:** Η μελέτη της ευστάθειας βασίζεται στο διάγραμμα μέτρου και φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου, με την προϋπόθεση ότι αυτή δεν έχει πόλους και μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.
- **Κριτήριο ευστάθειας Lyapunov:** Η μέθοδος αυτή καθορίζει την απόλυτη ευστάθεια εξετάζοντας τις ιδιότητες μιας ειδικής συνάρτησης που λέγεται συνάρτηση Lyapunov.



Κριτήριο Routh

Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

- Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο, **αν και μόνον αν οι συντελεστές της πρώτης στήλης του πίνακα Routh είναι ομόσημοι.**
- Ο αριθμός των αλλαγών προσήμου (εφόσον υπάρχουν) στην πρώτη στήλη, ισούται με τον αριθμό των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}},$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$



Παραδείγματα

- $s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & -4 & 6 \\ s^1 & 2.5 & 0 \\ s^0 & 6 & 0 \end{array}$$

- $2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 2 & 3 & 10 \\ s^3 & 1 & 5 & 0 \\ s^2 & -7 & 10 & 0 \\ s^1 & 6.43 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Εμφανίζονται δύο αλλαγές προσήμου στη πρώτη στήλη και στις δύο περιπτώσεις. Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.



1^η Ειδική περίπτωση Κριτηρίου Routh

Περίπτωση μηδενικού στοιχείου στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh.

- 1) Πολλαπλασιάζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s)$ επί τον παράγοντα $s+a$, $a>0$ όπου $-a$ δεν είναι ρίζα του $p(s)$.
- 2) Το κριτήριο Routh εφαρμόζεται στο πολυώνυμο $p_1(s)=(s+a)p(s)$.
- 3) Τα συμπεράσματα σχετικά με την ευστάθεια του $p_1(s)$ ισχύουν και για το $p(s)$.

- $p(s)=s^4+s^3+2s^2+2s+3$

- $p_1(s)=(s+1)p(s)$

$$p_1(s)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+5s+3$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 3 & 0 \\ s^1 & \infty & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 5 \\ s^4 & 2 & 4 & 3 \\ s^3 & 1 & 3.5 & 0 \\ s^2 & -3 & 3 & 0 \\ s^1 & 4.5 & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Τα πολυώνυμα έχουν δύο ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.



2^η Ειδική περίπτωση Κριτηρίου Routh

Η κατασκευή του πίνακα Routh δεν μπορεί να συνεχιστεί μετά από μία μηδενική γραμμή.

- Σχηματίζουμε το βοηθητικό πολυώνυμο $q(s)$ της γραμμής που προηγείται της μηδενικής.
- Παραγωγίζουμε το $q(s)$ και συμπληρώνουμε τη μηδενική γραμμή με τους συντελεστές του $q^{(1)}(s)$, όπου $q^{(1)}(s)$ είναι η πρώτη παράγωγος του $q(s)$.
- Συνεχίζουμε την κατασκευή του πίνακα Routh κατά τα γνωστά.

- $p(s)=s^5+s^4+2s^3+2s^2+3s+3$

$$q(s)=s^4+2s^2+3$$

$$q^{(1)}(s)=4s^3+4s$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 3 \\ s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 3 \\ s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 4 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 3 & 0 \\ s^1 & -8 & 0 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Οι δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη σημαίνουν δύο ρίζες της $p(s)$ στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.



Κριτήριο Hurwitz

Υπολογίζω τις ακόλουθες ορίζουσες

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= a_n \\ \Delta_1 &= a_{n-1} \end{aligned}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}, \text{ για } n \text{ περιττό}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \cdots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}, \text{ για } n \text{ άρτιο}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να βρίσκονται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο είναι $\Delta_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots$



Κριτήριο Hurwitz -Παράδειγμα

$$p(s)=s^3+10s^2+11s+6$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 104, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 62.4$$

Επειδή όλες οι ορίζουσες είναι θετικές, έπεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές.

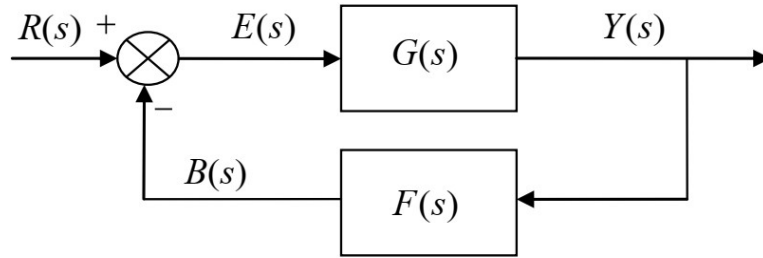


Κριτήριο Nyquist

- 1) Δίνει την ίδια πληροφορία με τα κριτήρια Routh και Hurwitz, σε ότι αφορά την απόλυτη ευστάθεια.
- 2) Επιπλέον, δίνει πληροφορία για τη **σχετική ευστάθεια ευσταθών συστημάτων**, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να βελτιωθεί η ευστάθεια.
- 3) Προσδιορίζει την απόκριση του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας.
- 4) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ευστάθειας συστημάτων με χρονικές καθυστερήσεις.
- 5) Μπορεί να τροποποιηθεί για μη-γραμμικά συστήματα, καθώς και για συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.



Κριτήριο Nyquist



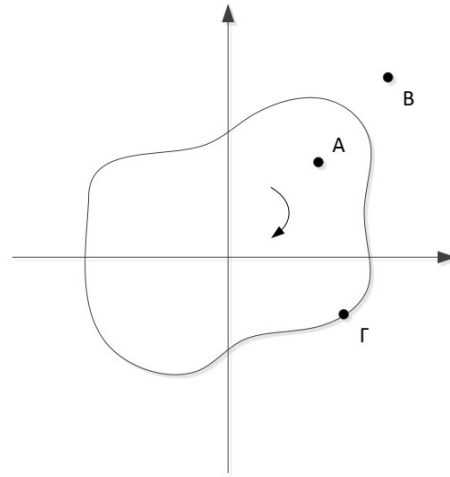
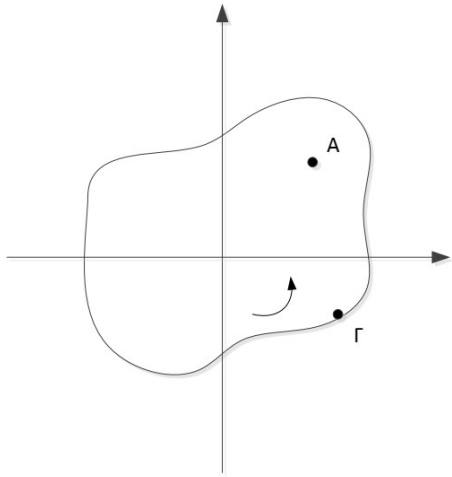
$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

$$W(s) = 1 + G(s)F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

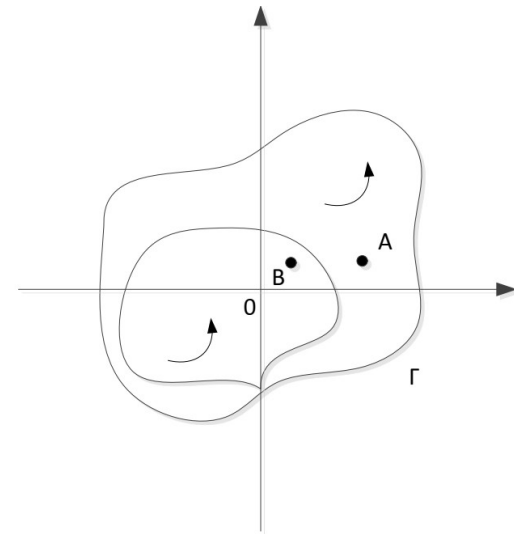
- Η $W(s)$ έχει m μηδενικά στα σημεία $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ τα οποία είναι και οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $W(s)=0$.
- Άρα, $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος.
- Όπως είναι γνωστό, για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές, θα πρέπει όλες οι τιμές $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

Κριτήριο Nyquist

Ένα σημείο ή περιοχή του επιπέδου λέγεται ότι περικλείεται από ένα κλειστό δρόμο, αν βρίσκεται αριστερά του δρόμου, σε σχέση με τη φορά διαγραφής του.



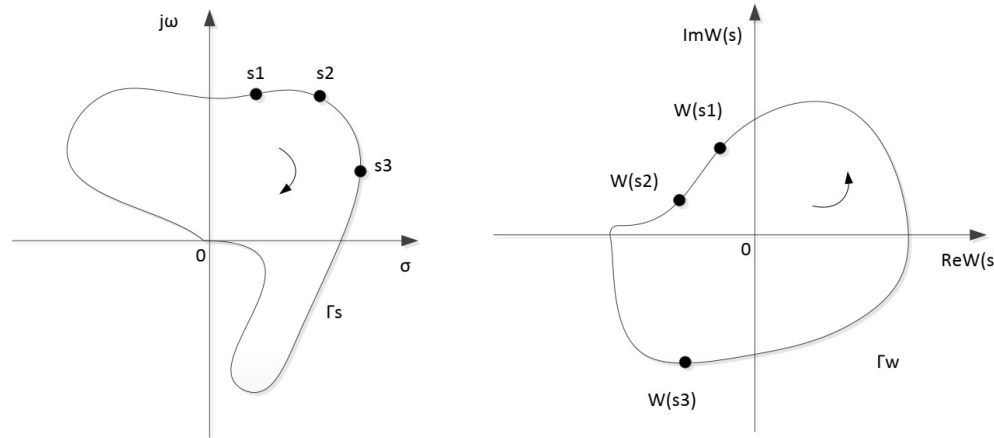
Περιοχές που περικλείονται από κλειστούς δρόμους.
(α) Περίπτωση αριστερόστροφου δρόμου.
(β) Περίπτωση δεξιόστροφου δρόμου.



Το σημείο A περικλείεται μία φορά,
ενώ το σημείο B δύο φορές.



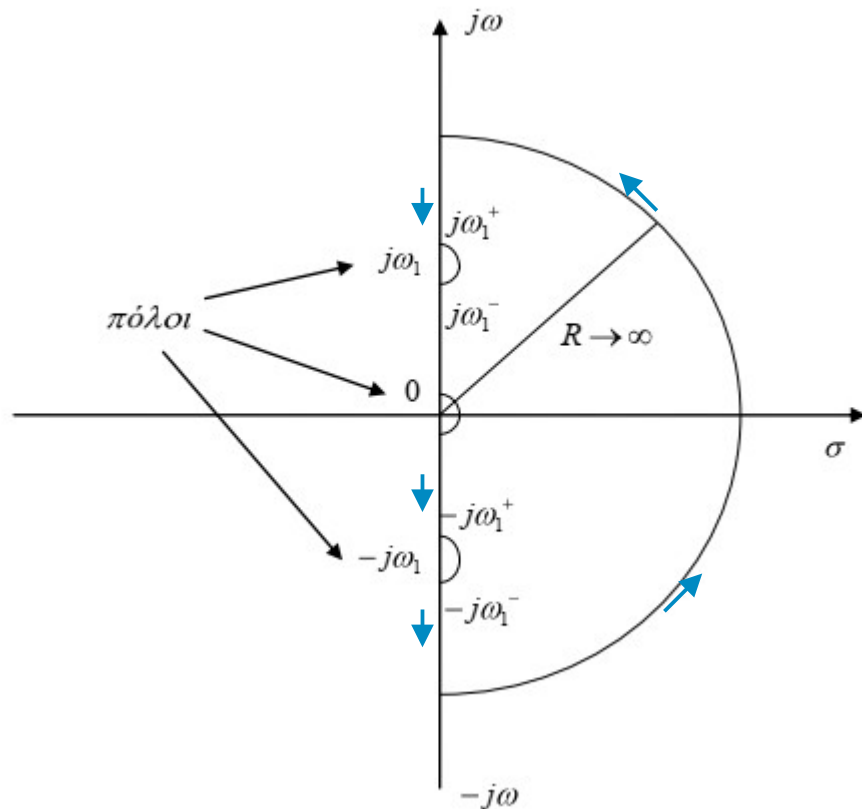
Κριτήριο Nyquist



Έστω μία μιγαδική συνάρτηση $W(s)$ και ένας κλειστός δρόμος Γ_s στο μιγαδικό επίπεδο. Για κάθε σημείο s του Γ_s , η συνάρτηση σχηματίζει επίσης ένα κλειστό δρόμο Γ_w στο μιγαδικό επίπεδο.

Θεώρημα: Έστω ότι Z είναι ο αριθμός των μηδενικών και P είναι ο αριθμός των πόλων της που περικλείονται από τον κλειστό δρόμο Γ_s . Τότε, ο αντίστοιχος δρόμος Γ_w , που απεικονίζει την $W(s)$, περικλείει την αρχή των αξόνων $N=Z-P$ φορές. Αν $N>0$, τότε ο Γ_w έχει την ίδια φορά με τον Γ_s ενώ αν $N<0$ αντίθετη φορά.

Δρόμος Nyquist



Θεωρούμε ένα κλειστό δρόμο που γράφεται με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και που περικλείει ολόκληρο το δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.

Ο δρόμος αυτός λέγεται **δρόμος Nyquist** και συμβολίζεται με Γ_N .

Επειδή η συνάρτηση $W(s)$ θα πρέπει να είναι αναλυτική κατά μήκος του Γ_N , χρησιμοποιούνται μικρά ημικύκλια μηδενικής ακτίνας, τα οποία παρακάμπτουν εκείνα τα σημεία του άξονα των φανταστικών αριθμών που είναι πόλοι της $W(s)$.

Έτσι δηλώνεται ότι ο δρόμος Nyquist δεν περνάει από τους πόλους της $W(s)$.

Διάγραμμα Nyquist

- Ο αντίστοιχος δρόμος που απεικονίζει την $W(s)$, όπου s ανήκει στο δρόμο Nyquist (Γ_N), λέγεται **διάγραμμα Nyquist** και συμβολίζεται με Γ_W .
- Τα μηδενικά z_i , $i=1,2,\dots,m$ της $W(s)$ είναι οι πόλοι του κλειστού συστήματος. Για να είναι αυτό ευσταθές, θα πρέπει κανένα από τα z_i να μη βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.
- Με άλλα λόγια, ο δρόμος Nyquist δεν θα πρέπει να περικλείει κανένα από τα z_i , δηλαδή θα πρέπει $Z=0$.

Θεώρημα: Έστω $W(s)$ έχει P πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $W(s)$ να περικλείει την αρχή των αξόνων $N = Z - P = 0 - P = -P$ φορές. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της $W(s)$ να περικλείει το σημείο $(0,0)$ P φορές, αλλά κατά αντίθετη φορά από αυτή του δρόμου Nyquist.

Δρόμο Nyquist $\Gamma_N \rightarrow$ Διάγραμμα Nyquist Γ_W



Γενικό Θεώρημα Nyquist

- Επειδή είναι σχετικά πιο απλό να χαράζουμε το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ από αυτό της $G(s)F(s)+1$, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $W^*(s) = G(s)F(s) = W(s)-1$.
- Το διάγραμμα Nyquist της $W^*(s)$ διαφέρει από αυτό της $W(s)$ μόνο ως προς το ότι είναι μετατοπισμένο προς τα αριστερά κατά μία μονάδα.

Γενικό Θεώρημα Nyquist

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = G(s)F(s)/(1+G(s)F(s))$, όπου η $W^(s) = G(s)F(s)$ είναι ρητή, αναλυτική συνάρτηση που έχει P πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist Γ_{W^*} της $W^*(s) = G(s)F(s)$ να περικλείει το σημείο $(-1, 0j)$ $-P$ φορές.*

Το σημείο $(-1, 0j)$ λέγεται **κρίσιμο σημείο**.



Γενικό Θεώρημα Nyquist

- Μία συνάρτηση $W(s)$ λέγεται **ελάχιστης φάσης**, αν δεν έχει πόλους ή μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο.
- Σε αντίθετη περίπτωση λέγεται μη-ελάχιστης φάσης.

Θεώρημα

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς (5.9), όπου η $W^*(s) = G(s)F(s)$ είναι ρητή, **αναλυτική συνάρτηση ελάχιστης φάσης**. Τότε, για να είναι το σύστημα ευσταθές, θα πρέπει το διάγραμμα Nyquist της Γ_{W^*} της $W^*(s) = G(s)F(s)$ **να μην περικλείει το κρίσιμο σημείο $(-1, 0j)$** .



Σχετική ευστάθεια: περιθώριο ενίσχυσης

- Έστω ω_c η κρίσιμη συχνότητα κατά την οποία το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή, $\text{Im}[G(s)F(s)] = 0$ και $\angle G(s)F(s) = \pi$.
- Το περιθώριο ενίσχυσης του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση $K_G = -20\log_{10}\|G(s)F(s)\|$ και μετράται σε db.
- Φυσική σημασία του περιθωρίου ενίσχυσης: Το περιθώριο ενίσχυσης εκφράζει το μέγιστο επιτρεπτό ποσό αύξησης της ενίσχυσης (σε db) της $G(s)F(s)$, για το οποίο το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές. Η αύξηση αυτή γίνεται συνήθως μεταβάλλοντας το K .
- Αρνητικές τιμές του K_G δηλώνουν την αστάθεια του συστήματος.



Σχετική ευστάθεια: περιθώριο φάσης

- Έστω ω_ϕ η συχνότητα κατά την οποία το πλάτος του διαγράμματος Nyquist της $G(s)F(s)$ είναι μονάδα, δηλαδή, $\|G(s)F(s)\|=1$. Έστω ϕ το όρισμα της $G(j\omega_\phi)F(j\omega_\phi)$. Το περιθώριο φάσης του κλειστού συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\phi_p = -180 + \phi.$$

- Φυσική σημασία του περιθωρίου φάσης: Το περιθώριο φάσης εκφράζει τη μέγιστη επιτρεπτή γωνία περιστροφής του διαγράμματος Nyquist της $G(s)F(s)$ γύρω από την αρχή των αξόνων, για την οποία το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές, δηλαδή, μέχρις ότου το σημείο με $\|G(s)F(s)\|=1$ να συμπέσει με το κρίσιμο σημείο $(-1, j0)$. Η περιστροφή γίνεται συνήθως μεταβάλλοντας τις παραμέτρους του συστήματος (χρονικές σταθερές, συντελεστή απόσβεσης).



Γεωμετρικός τόπος των ριζών

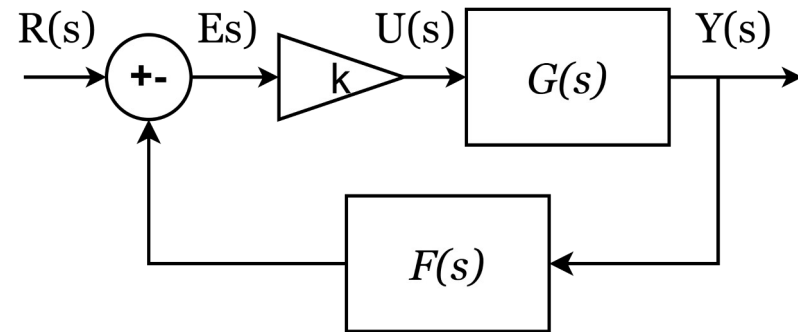
- Εποπτική μέθοδος μελέτης της ευστάθειας και της σχετικής ευστάθειας ενός συστήματος.
- Οι πόλοι ενός συστήματος (δηλαδή, οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς του) καθορίζουν την ευστάθειά του, καθώς επίσης και τη χρονική του απόκριση.
- Κάθε μεταβολή του K έχει σαν συνέπεια τη μετατόπιση των πόλων πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.
- Έτσι, ο γεωμετρικός τόπος των ριζών (γ.τ.ρ) της χαρακτηριστικής εξίσωσης (Χ.Ε.) του κλειστού συστήματος, καθώς το K μεταβάλλεται, δίνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό ευσταθών συστημάτων.



Γεωμετρικός τόπος των ριζών

- Έστω το σύστημα ανοιχτού βρόχου με m μηδενικά και n πόλους

$$G(s)F(s) = \frac{a(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}, a>0$$



Οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου είναι τιμές του s που ικανοποιούν τη χαρακτηριστική εξίσωση.

Χαρακτηριστική Εξίσωση: $\Delta(s) = 1 + kG(s)F(s) = 0$



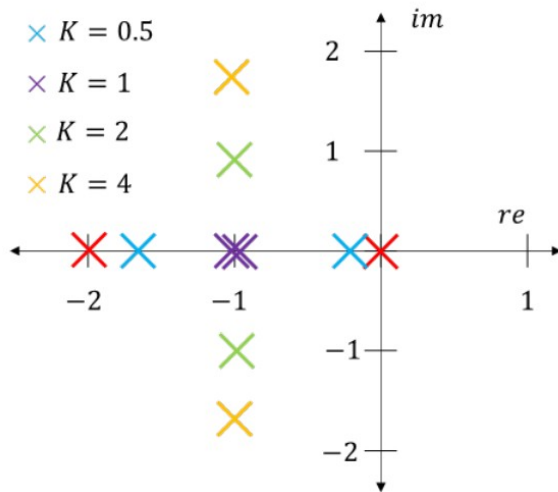
Γεωμετρικός τόπος των ριζών

Μια απλή μέθοδος εύρεσης του γεωμετρικού τόπου ριζών είναι απλά η επίλυση της Χ.Ε. επαναληπτικά για διαφορετικές τιμές του k .

- Παράδειγμα $G(s)F(s) = \frac{1}{s(s+2)} \rightarrow T(s) = \frac{kG(s)F(s)}{1+kG(s)F(s)} = \frac{k}{s^2+2s+k} \rightarrow X.E: s^2+2s+k=0$

Legend

- $\times K = 0$
- $\times K = 0.5$
- $\times K = 1$
- $\times K = 2$
- $\times K = 4$



Η παραπάνω τεχνική δεν αποδίδει καμία φυσική κατανόηση της συμπεριφοράς του γ.τ.ρ. και μπορεί να επιτευχθεί μόνο από υπολογιστικά μέσα.

Για παράδειγμα, θα γίνουν τελικά οι πόλοι ασταθείς;

Θα μπορούσαν να επιστρέψουν στον πραγματικό άξονα αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε το κέρδος; Υπάρχουν πολλά ερωτήματα που μένουν αναπάντητα, γεγονός που μας ωθεί να διερευνήσουμε περαιτέρω.

Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- Αν $G(s)F(s) = \frac{a(s)}{b(s)}$ τότε η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

$$T(s) = \frac{\kappa \frac{a(s)}{b(s)}}{1 + \kappa \frac{a(s)}{b(s)}} = \frac{\kappa a(s)}{\kappa a(s) + b(s)}$$

Αριθμός μηδενικών της $G(s)F(s)$ = τάξη του πολωνύμου $O(a(s)) = m$
Αριθμός πόλων της $G(s)F(s)$ = τάξη του πολωνύμου $O(b(s)) = n$

Άρα η Χ.Ε. είναι: $\Delta(s) = \kappa a(s) + b(s) = 0$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι κανονική τότε $m \leq n$.

Η τάξη του $\Delta(s)$ πρέπει να παραμείνει στο n (αφού $O(b(s)) \geq O(a(s))$).

Κανόνας 1^{ος}: Ο αριθμός των πόλων δεν αλλάζει, ανεξάρτητα από την τιμή του κ .



Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

Χ.Ε. κλειστού βρόχου $\Delta(s) = ka(s) + b(s) = 0$

- Όταν $k=0$, έχουμε $\Delta(s)=b(s)=0$. Παρατηρούμε ότι όταν $k = 0$, οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου είναι οι πόλοι του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Όταν $k \rightarrow \infty$, έχουμε $\Delta(s)=ka(s)+b(s) \approx ka(s)=0$ δηλαδή $a(s)=0$. Παρατηρούμε ότι όταν το k είναι πολύ μεγάλο, οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου είναι τα μηδενικά του συστήματος ανοικτού βρόχου.
- Τα μηδενικά λειτουργούν ως «μαγνήτες» με την έννοια ότι έχουν την ικανότητα να προσελκύουν πόλους.

Κανόνας 2^{ος}: Ο γ.τ.ρ. ξεκινάει από τους πόλους του συστήματος ανοικτού βρόχου και καταλήγει είτε στα μηδενικά του συστήματος ανοικτού βρόχου (m πόλοι) είτε στο άπειρο (υπόλοιποι $n-m$ πόλοι). Έχει επομένως n διακλαδώσεις.



Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

$$\text{angle}(uv) = \text{angle}(u) + \text{angle}(v)$$

$$\text{angle}\left(\frac{u}{v}\right) = \text{angle}(u) - \text{angle}(v)$$

$$\text{angle}(c) = 0, c > 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{angle}(c) = -\pi, c < 0 \in \mathbb{R}$$

$$\Delta(s) = ka(s) + b(s) = 0 \Rightarrow \frac{a(s)}{b(s)} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{a(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = -\frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\text{angle}(a) + \text{angle}(s+z_1) + \text{angle}(s+z_2) + \dots + \text{angle}(s+z_m) - \text{angle}(s+p_1) - \text{angle}(s+p_2) - \dots - \text{angle}(s+p_n) = \text{angle}\left(-\frac{1}{k}\right) \Rightarrow$$

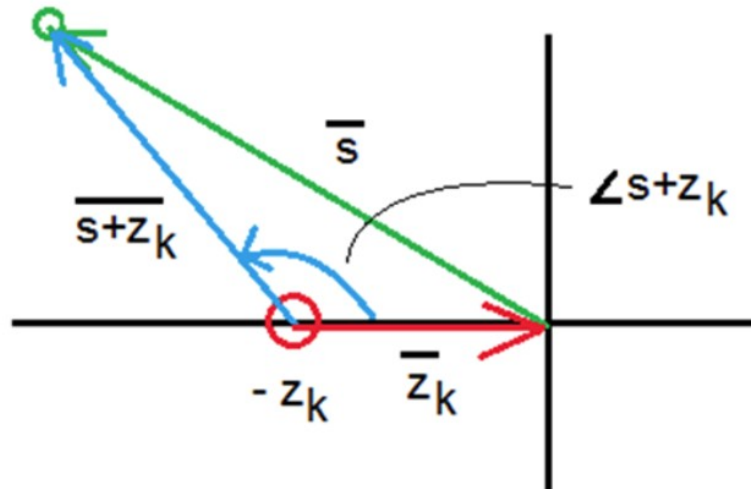
$$\sum_{i=1}^m \text{angle}(s+z_i) - \sum_{i=1}^n \text{angle}(s+p_i) = -\pi \pm 2b\pi, b \in \mathbb{Z}$$

Τα μηδενικά z_i και οι πόλοι p_i είναι σταθεροί, οπότε ψάχνουμε για τιμές του s που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.



Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- Γραφικά, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $s + z_k$ λαμβάνεται απλά σχεδιάζοντας ένα διάνυσμα από τη θέση του μηδενικού $-z_k$ στη θέση του s . Το ίδιο ισχύει και για τους πόλους.
- Στη συνέχεια η γωνία του διανύσματος υπολογίζεται πολύ εύκολα.



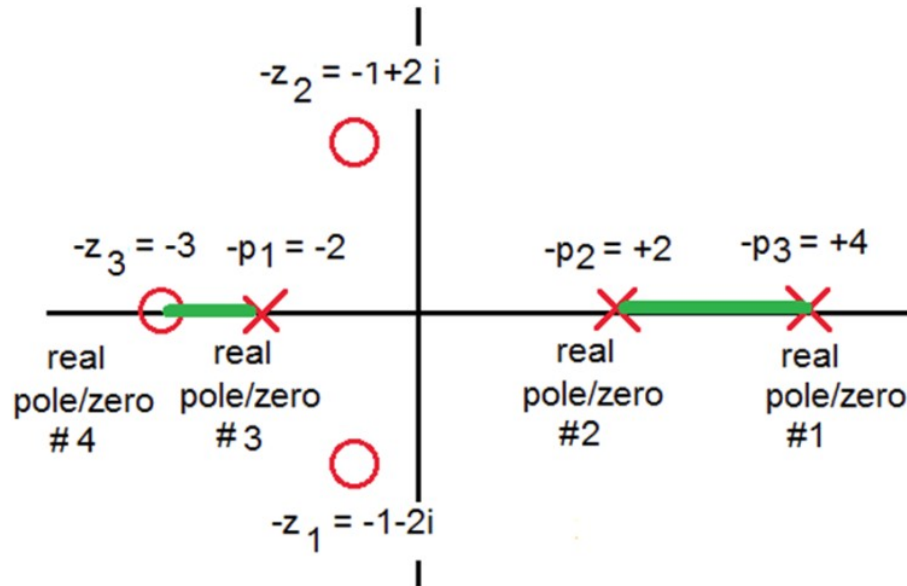
Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- Ας διερευνήσουμε τώρα την ποσότητα $\angle(s + z_k)$ όταν το s βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:
 - Περίπτωση 1. Το z_k βρίσκεται στον πραγματικό άξονα
 - $\angle(s + z_k)=0$ αν το s βρίσκεται στον πραγματικό άξονα και δεξιά από το μηδενικό $-z_k$.
 - $\angle(s + z_k)=\pi$ αν το s βρίσκεται στον πραγματικό άξονα και αριστερά από το μηδενικό $-z_k$.
 - Περίπτωση 2. Το z_k είναι μία από τις μιγαδικές συζυγείς ρίζες.
 - $\angle(s + z_{k1}) + \angle(s + z_{k2})=0$ εάν z_{k1}, z_{k2} είναι συζυγείς μιγαδικές ρίζες.



Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

Κανόνας 3^{ος}: Εγκυρες περιοχές του γ.τ.ρ. στον πραγματικό άξονα είναι εκείνες που στα δεξιά τους υπάρχει περιττός αριθμός πόλων/μηδενικών.



Πρέπει να ικανοποιείται η σχέση

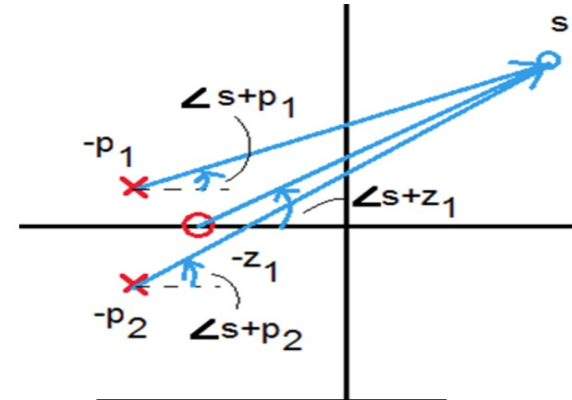
$$\sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s+p_i) = -\pi \pm 2b\pi, b \in \mathbb{Z}$$

Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- Αριθμός διακλαδώσεων που καταλήγουν στο άπειρο = Αριθμός πόλων – Αριθμός μηδενικών = $n-m$
- Ποια είναι η γωνία των ασύμπτωτων που σχηματίζουν οι πόλοι καθώς πηγαίνουν από τα μηδενικά στο άπειρο;
- Εάν το s (το υποψήφιο σημείο μας που βρίσκεται στον γ.τ.ρ.) είναι πολύ μακριά, τότε οι γωνίες που φαίνονται στο διάγραμμα είναι σχεδόν ίσες.

$$\sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s+p_i) = -\pi + 2b\pi, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$n\theta - m\theta = -\pi + 2b\pi, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\theta = (1 \pm 2b) \frac{\pi}{n-m}, b=0,1,\dots,n-m-1$$

- Όλες οι ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου των ριζών τέμνονται σε ένα σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών. Το σημείο τομής των ασύμπτωτων είναι το σημείο σ_A .



$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n -p_i - \sum_{i=1}^m -z_i}{n-m}$$

Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- **Κανόνας 4^{ος}**: Η γωνία των ασύμπτωτων και το κέντρο τους υπολογίζονται ως:

$$\theta = \frac{(1 \pm 2b)\pi}{n-m}$$
$$b = 0, 1, \dots, n-m-1$$

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{i=1}^m (-z_i)}{n-m}$$

- **Κανόνας 5^{ος}**: Η γωνία αναχώρησης από το πόλο $-p_j$ υπολογίζεται ως:

$$\theta_j = \pi(1 \pm 2\beta) + \sum_{i=1}^m \angle(-p_j + z_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(-p_j + p_i)$$

- **Κανόνας 6^{ος}**: Ο γ.τ.ρ. είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- **Κανόνας 7^{ος}**: Ο γ.τ.ρ. τέμνει πάντα κάθετα τον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Προσεγγιστική μέθοδος κατασκευής της γραφικής παράστασης του γεωμετρικού τόπου ριζών.

- *Κανόνας 8^{ος}: Τα σημεία θλάσης του γ.τ.ρ. είναι οι ρίζες της εξίσωσης*

$$\frac{d[G(s)F(s)]}{ds}=0$$



Αρμονική απόκριση

- Αρμονική απόκριση ενός συστήματος λέγεται η έξοδός του στη μόνιμη κατάσταση $y_{ss}(t)$, όταν η είσοδός του είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση.
- Θεωρούμε το σύστημα μίας εισόδου-μίας εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = k \frac{(s+z_1)(s+z_2) \dots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \dots (s+p_n)}$, $m < n$.
- Έστω ότι η είσοδος είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση $r(t) = R \sin(\omega t)$ με μετασχηματισμό Laplace:

$$R(s) = \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Η απόκριση του συστήματος είναι $Y(s) = H(s)R(s) = k \frac{(s+z_1)(s+z_2) \dots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \dots (s+p_n)} \frac{R\omega}{s^2 + \omega^2}$
με απόκριση στο πεδίο του χρόνου

$$y(t) = L^{-1}Y(s) = K_1 e^{-p_1 t} + K_2 e^{-p_2 t} + \dots + K_n e^{-p_n t} + K_{n+1} e^{-j\omega t} + K_{n+2} e^{j\omega t}.$$

- Αν όλοι οι πόλοι της $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημι-επίπεδο, η χρονική απόκριση στη μόνιμη κατάσταση θα είναι

$$y_{ss}(t) = L^{-1}Y(s) = K_{n+1} e^{-j\omega t} + K_{n+2} e^{j\omega t}.$$



Αρμονική απόκριση

- Είναι $K_{n+1} = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) Y(s) = -\frac{H(-j\omega)R}{2j}$, $K_{n+2} = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s) = \frac{H(j\omega)R}{2j}$

άρα

$$y_{ss}(t) = \frac{R}{2j} [-H(-j\omega)e^{-j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t}].$$

- Αποδεικνύεται ότι $Re(H(j\omega)) = Re(H(-j\omega))$ οπότε η μόνιμη κατάσταση γίνεται
 $Im(H(j\omega)) = -Im(H(-j\omega))$

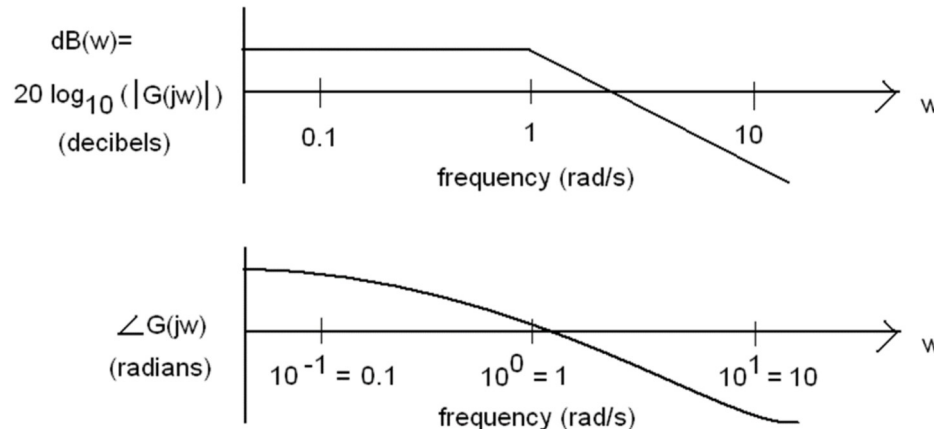
$$y_{ss}(t) = R|H(j\omega)|\sin(\omega t + \text{phase}(H(j\omega)))$$

Οπότε αν έχουμε ευσταθείς πόλους, τότε η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση, για ημιτονοειδή είσοδο, δηλαδή η αρμονική απόκριση, είναι και αυτή ημιτονοειδής με κέρδος $|H(j\omega)|$ και διαφορά φάσης $\angle H(j\omega)$.



Διάγραμμα Bode

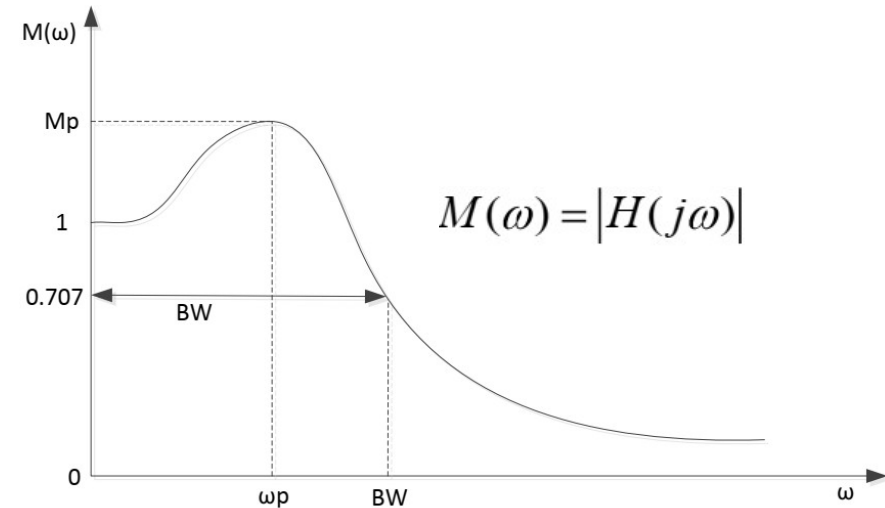
- Το διάγραμμα Bode αναφέρεται στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μεταφοράς $H(j\omega)$ ως προς την κυκλική συχνότητα ω .
- Αποτελείται από δύο καμπύλες:
 - την γραφική παράσταση του πλάτους σε db, δηλαδή την καμπύλη του $20\log_{10}(|H(j\omega)|)$ και
 - την γραφική παράσταση της φάσης (δηλαδή την καμπύλη του ορίσματος $\angle H(j\omega)$)
 - Επίσης, ο άξονας των κυκλικών συχνοτήτων είναι λογαριθμικός.



Ενισχύθηκε το σήμα $\Leftrightarrow$ θετικά dB
Εξασθένιση του σήματος $\Leftrightarrow$ αρνητικά dB
dB = 0 σημαίνει ότι κέρδος=1 ($\log_{10}1=0$)

Διάγραμμα Bode

- Μέγιστη τιμή M_p ορίζεται ως η μέγιστη τιμή του πλάτους M . Μεγάλες τιμές του M_p αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές υπερύψωσης στη βηματική απόκριση.
- Συχνότητα συντονισμού ω_p είναι η συχνότητα για την οποία $M=M_p$.
- Εύρος ζώνης BW της καμπύλης του πλάτους είναι η συχνότητα για την οποία $M(\omega_b=BW)=0.707$.
- Το εύρος ζώνης είναι αντιστρόφως ανάλογο του χρόνου ανύψωσης της βηματικής απόκρισης.



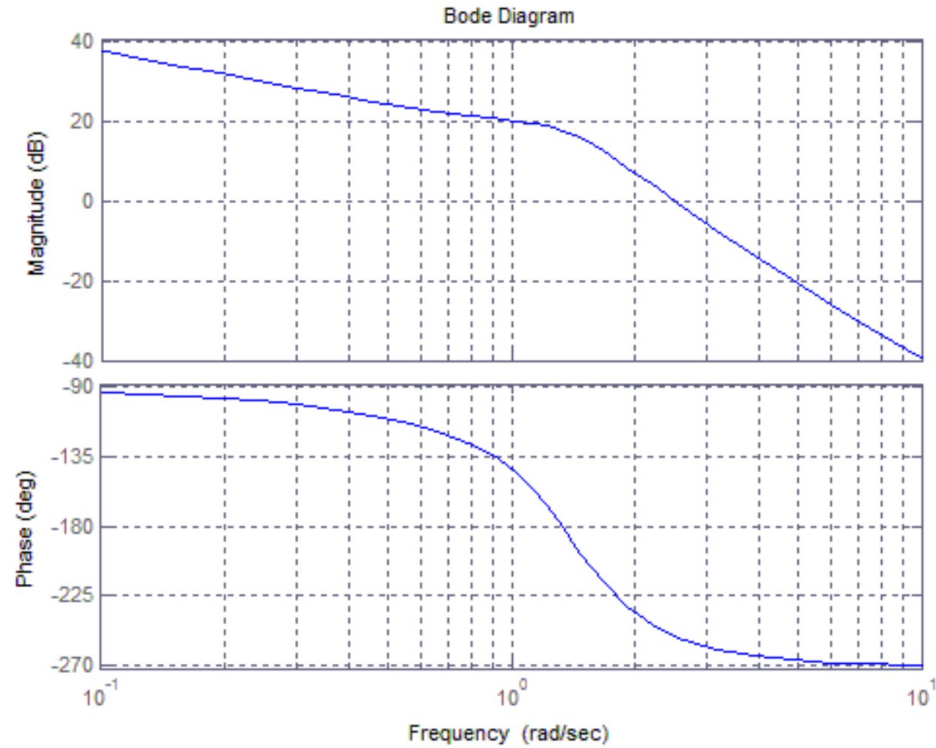
Κατασκευή διαγράμματος Bode

- Εξετάζεται η κατασκευή του διαγράμματος Bode παραγόντων διαφόρων μορφών που συνήθως εμφανίζονται στη συνάρτηση μεταφοράς. Στη συνέχεια, το ολικό διάγραμμα Bode κατασκευάζεται από τη σύνθεση των επί μέρους διαγραμμάτων των διαφόρων παραγόντων.
- Στοιχεία που συνθέτουν μια συνάρτηση μεταφοράς
 - 1) Ένας πραγματικός πόλος
 - 2) Ένα πραγματικό μηδενικό
 - 3) Πόλος στην αρχή των αξόνων
 - 4) Μηδενικό στην αρχή των αξόνων
 - 5) Ζεύγος σύνθετων συζευγμένων πόλων
 - 6) Ζεύγος σύνθετων συζυγών μηδενικών
 - 7) Σταθερό κέρδος



Διάγραμμα Bode

$$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{7.5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$



Περιθώρια Κέρδους και Ενίσχυσης με διάγραμμα Bode

