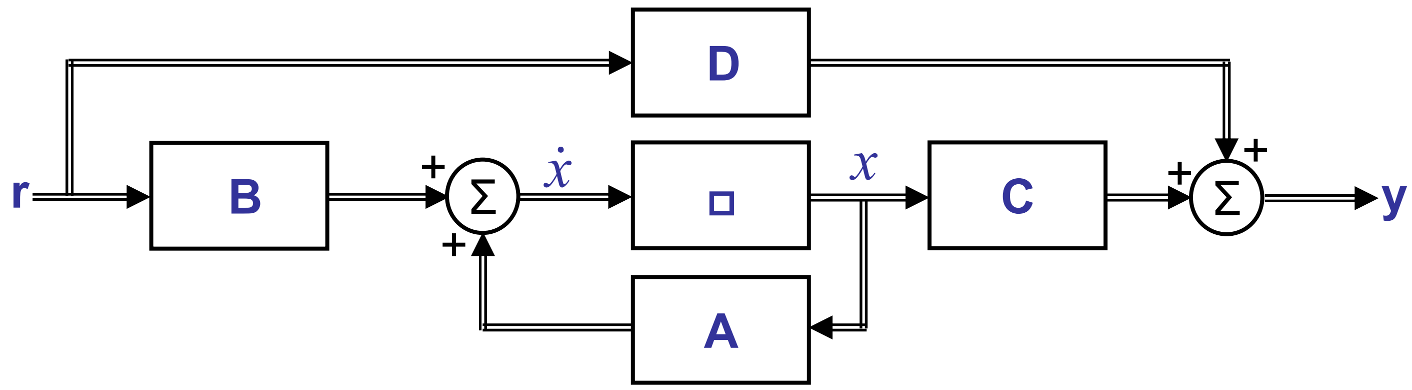
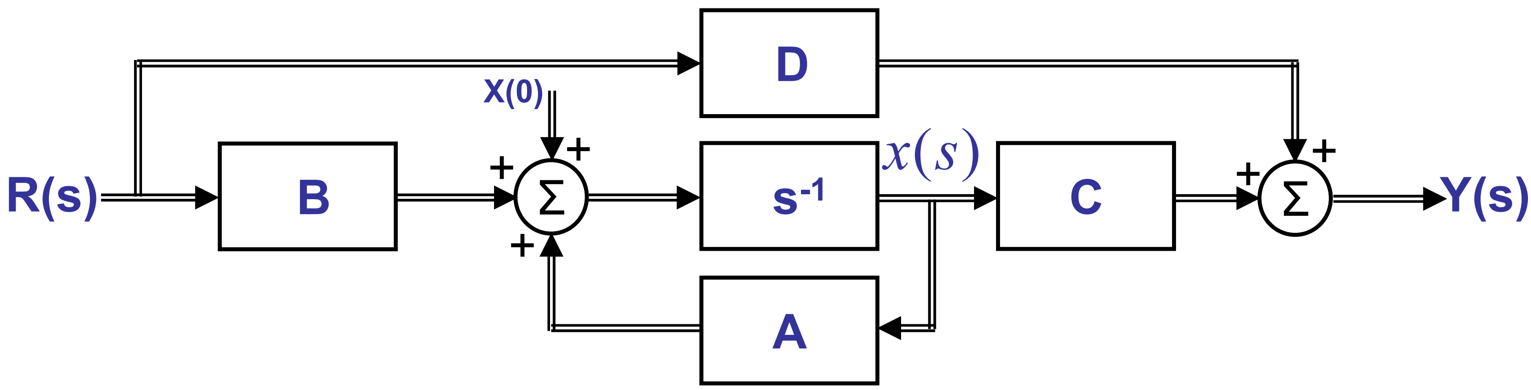
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΒΑΘΜΙΔΩΝ



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t), \qquad t \in [0, T]$$
$$x(0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t) + Dr(t)$$



$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BR(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DR(s)$$

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ: ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΟ - ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟ

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Br(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Dr(t) \\
x(0) &= x_0
\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ: $\dot{x}(t) = Ax(t)$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ Φ(t)

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

x(t) δυναμοσειρά

$$x(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + \dots$$

$$e_i \in \mathbb{R}^n, \qquad i = 0, 1, \dots$$

$$x(0) = e_0$$
$$x^{(1)}(0) = e_1 = Ax(0)$$
$$x^{(2)}(0) = 2e_2 = A^2 x(0)$$

$$x(t) = \underbrace{\left[I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \dots \right]}_{e^{At}} x(0)$$

$x(t) = e^{At}x(0)$ **λύση της ομογενούς**

επειδή $$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$$

θα είναι $$\Phi(t) = e^{At}$$

Άλλος τρόπος:

$$\dot{x}(t) = \mathrm{A}x(t)$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

$$x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0)$$

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)x(0)}$$

Λύση μη ομογενούς:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t)$$

$$\boxed{x_{o\mu\gamma}(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0)} \qquad \Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Έστω: $x_{\mu o}(t) = \Phi(t)q(t)$

$q(t) \in \mathbb{R}^n$ **άγνωστο**

$$\dot{\Phi}(t)q(t) + \Phi(t)\dot{q}(t) = A\Phi(t)q(t) + Br(t)$$

$$\Phi(t)\dot{q}(t) = Br(t)$$

$$\dot{q}(t) = \Phi^{-1}(t)Br(t)$$

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)Br(\tau)d\tau$$

$$\boxed{x_{\mu o} = \Phi(t)q(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)Br(\tau)d\tau}$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)x(0)}$$

- ελεύθερη απόκριση
- μετάβαση του **x(t)** από την αρχική κατάσταση **x(0)** σε οποιαδήποτε νέα κατάσταση

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $t=t_0$:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Φ(t):

$$\Phi(0) = I$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0), \qquad \forall t_0,t_1,t_2$$

$$\left[\Phi(t)\right]^k = \Phi(kt)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Φ(t):

α) $\Phi(t) = L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

β) Α $\rightarrow$ έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές $\boxed{\Phi(t) = e^{At} = Me^{\Lambda t}M^{-1}}$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathrm{O} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

γ) $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$ $\rightarrow$ Η/Υ

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ:

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t)}$$

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)Br(\tau)d\tau$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ:

$$\boxed{x = Tz}$$

$$\dot{x} = Ax + Br$$
$$y = Cx + Dr$$

$$x(0) = x_0$$

T: πίνακας μετασχηματισμού nxn, $|T| \neq 0$

$$\dot{z} = A^* z + B^* r$$
$$y = C^* z + D^* r$$
$$z(0) = z_0$$

$$A^* = T^{-1}AT$$
$$B^* = T^{-1}B$$
$$C^* = CT$$
$$D^* = D$$

$$z_0 = T^{-1}x_0$$

ΣΗΜΑΣΙΑ

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΩΝ

Μετάβαση από περιγραφή σε περιγραφή: μονοσήμαντη ή μη

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$\left[A(t), B(t), C(t), D(t)\right]_n$ **και** $\left[A^*(t), B^*(t), C^*(t), D^*(t)\right]_n$

τότε και μόνο τότε αν: $\exists T(t), \left|T(t)\right| \neq 0,$ **με συν. παραγ.**

$$A(t) = T(t)A^*(t)T^{-1}(t) + \dot{T}(t)T^{-1}(t)$$

$$B(t) = T(t)B^*(t)$$

$$C(t) = C^*(t)T^{-1}(t)$$

$$D(t) = D^*(t)$$

ΑΥΣΤΗΡΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$\left[A(t), B(t), C(t), D(t)\right]_n$ **και** $\left[A^*(t), B^*(t), C^*(t), D^*(t)\right]_n$

τότε και μόνο τότε αν: $\exists T, \left|T\right| \neq 0,$ **σταθερός**

$$A(t) = TA^*(t)T^{-1}$$

$$B(t) = TB^*(t)$$

$$C(t) = C^*(t)T^{-1}$$

$$D(t) = D^*(t)$$

- **Η περιγραφή εισόδου – εξόδου μένει αναλλοίωτη κάτω από αλγεβρική ή αυστηρή ισοδυναμία.**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\left[A, B, C, D\right]_n$ μια πραγμάτωση ελάχιστης διάστασης της H(s

Τότε οποιαδήποτε άλλη περιγραφή ελάχιστης διάστασης

$\left[A^*, B^*, C^*, D^*\right]_n$ **δίνεται:**

$$A^* = T^{-1}AT$$

$$B^* = T^{-1}B$$

$$C^* = CT$$

$$D^* = D$$

όπου T αυθαίρετος σταθερός (nxn) – πίνακας με $|T| \neq 0$

Ε.Κ. $\rightarrow$ H(s): Πρόβλημα Υπολογιστικό
H(s) $\rightarrow$ Ε.Κ.: Πρόβλημα Υπολογιστικό + Θεωρητικό

Κατάλληλη ΕΚΛΟΓΗ $\left(A, B, C, D\right)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $$p^*(s) = p(s)$$

$$p^*(s) = \left|sI - A^*\right|, p(s) = \left|sI - A\right|$$

2) $$H^*(s) = H(s)$$

$$H^*(s) = C^*\left(sI - A^*\right)^{-1} B^* + D^*$$

$$H(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

- **ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ:** **ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ** **του A**

- **ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ**

  ΦΑΣΗΣ: **→ΕΛΕΓΞΙΜΟ**

  ειδικά: σύστημα μιας εισόδου

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{bmatrix}, b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΦΑΣΗΣ: →ΕΛΕΓΞΙΜΟ

γενικά: σύστημα πολλών εισόδων

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & \cdots & A_{1m}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^* & A_{m2}^* & \cdots & A_{mm}^* \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \\ \\ B_m^* \end{bmatrix}$$

m= αριθμός εισόδων

$$A_{ii}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_{ii}^*)_0 & -(a_{ii}^*)_1 & \cdots & -(a_{ii}^*)_{\sigma_{i-1}} \end{bmatrix}$$

$$A_{ii}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ ---------------- \\ -(a_{ij}^*)_0 - (a_{ij}^*)_1 \ldots - (a_{ij}^*)_{\sigma_{j-1}} \end{bmatrix}$$

$$B_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ ------------------ \\ 0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 1 \quad (b_i^*)_{i+1} \;\; \ldots \;\; (b_i^*)_m \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = n$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΦΑΣΗΣ

συστήματα μιας εισόδου:

$$S = \left[b \vdots Ab \vdots A^2 b \vdots \cdots \vdots A^{n-1} b \right]$$

q: τελευταία γραμμή S^{-1}

$$T = P^{-1}$$

$$T^{-1} = P = \begin{bmatrix} q \\ \cdots \\ qA \\ \cdots \\ qA^2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix}$$

συστήματα πολλών εισόδων:

$$S = \left[b_1 \vdots Ab_1 \vdots \cdots \vdots A^{\sigma_1 - 1} b_1 \vdots b_2 \vdots Ab_2 \vdots \cdots \vdots A^{\sigma_2 - 1} b_2 \vdots \cdots \vdots A^{\sigma_m - 1} b_m \right]$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = n, \quad \delta_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i, k = 1, 2, \ldots, m$$

q_{δ_κ}: η δ_κ – γραμμή του S^{-1}

$$T^{-1} = P = \begin{bmatrix} q_{\delta_1} \\ q_{\delta_1} \mathrm{A} \\ \vdots \\ q_{\delta_1} \mathrm{A}^{\sigma_1 - 1} \\ \cdots \\ \vdots \\ q_{\delta_m} \\ q_{\delta_m} A \\ q_{\delta_m} A^{\sigma_m - 1} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΦΑΣΗΣ: (Kuo ex.4-8)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \left[b \;\vdots\; Ab \right] = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = T^{-1} = \left[\begin{array}{c} q \\ \hdashline qA \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{*} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 \end{array}\right], b^{*} = T^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 1 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\left[b_1 \;\vdots\; b_2\right]$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & -2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

n=3 m=2 σ_1=2 σ_2=1

$$S=\left[\; b_1 \;\vdots\; Ab_1 \;\vdots\; b_2 \;\right]=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

det S=(-2) (-1)=2

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ -0.5 & 1.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

$\delta_1=\sigma_1=2\rightarrow q_2$
$\delta_2=\sigma_1+\sigma_2=2+1\rightarrow q_3$

$$T^{-1}=P=\begin{bmatrix}q_2\\ q_2 A\\ \hline q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & -4 & -1\\ -0.5 & 1.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

$$T=P^{-1}=\ldots$$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$n=3$, $m=2$
$\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$

$$S=\left[\begin{array}{c|c|c} b_1 & Ab_1 & b_2 \end{array}\right]=\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & -6 & -8 \\ 8 & -10 & -8 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\delta_1=\sigma_1=2 \rightarrow q_2$
$\delta_2=\sigma_1+\sigma_2=3 \rightarrow q_3$

$$T^{-1}=P=\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, T=P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{*}=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΦΑΣΗΣ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = r(t)$$

$$x_1(t) = y(t), \qquad x_2(t) = y^{(1)}(t), \ldots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + br(t), \\ y(t) &= c^T x(t) \end{aligned}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a} \end{array} \right], a = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots - a_{n-1})$$

$$p(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$(sI - A)^{-1} b = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Δ.Ε.→H(s)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_0 r(t)$$

$$y^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_0 R(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_m r^{(m)} + b_{m-1}r^{(m-1)} + \ldots + b_0 r$$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

H(s) → Δ.Ε. (σύστημα μ. ε. μ. ε.)

$$s^k \to s^{(t)}$$

$$Y(s) \to y(t)$$

$$R(s) \to r(t)$$

$$H(s) \leftrightarrow h(t)$$

$$Lh(t) = H(s), h(t) = L^{-1}H(s)$$

Ε.Κ.→H(s)

$$H(s) = C(SI - A)^{-1} B + D$$

H(s)→ Ε.Κ. πρόβλημα της πραγματοποίησης

ΣΥΣΤΗΜΑ Μ.Ε.Μ.Ε.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) &= \dot{x}_2(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \dot{x}_{n-1}(t) \end{aligned}\right\} \text{ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΦΑΣΗΣ}$$

$$\boxed{H(s) = C(SI - A)^{-1} B + D}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Π.Ε.Π.Ε.

$$H(s)=\begin{bmatrix} h_{11}(s) & \cdots & h_{1m}(s) \\ h_{21}(s) & \cdots & h_{2m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{p1}(s) & \cdots & h_{pm}(s) \end{bmatrix}, h_{ij}(s)=\frac{\gamma_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}$$

βαθ.(γ_{ij}(s))< βαθ.(p_{ij}(s))

ΕΣΤΩ: $p(s)=s^n+p_{n-1}s^{n-1}+\ldots+p_1 s+p_0,$ **Ε.Κ.Π. p_{ij}(s)**

ΤΟΤΕ: $p(s)H(s)=H_0+H_1 s+\ldots+H_{n-1}s^{n-1}$

$$=\begin{bmatrix} O_m & I_m & O_m & \cdots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \cdots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \cdots & I_m \\ -p_0 I_m & -p_1 I_m & -p_2 I_m & \cdots & -p_{n-1} I_m \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} O_m \\ O_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_{n-1} \end{bmatrix}$$

- **Μια περιγραφή κατάστασης: (δεν είναι μοναδική)**
- **ΠΡ. ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (ύπαρξη ή μη περιγραφής)**
- **ΠΡ. ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΙΑΣΤ. (ελάχιστη αρ. μεταβ. κατάστασης)**
- **ΠΡ. ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜ. (π.χ. πραγμ. μ.ε.μ.ε.)**

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ H(s) στις Ε.Κ.

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 + s + 5}$$

ΣΥΣΤΗΜΑ 4ης ΤΑΞΗΣ

$$a_0 = 5 \qquad b_0 = 1$$
$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 2$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = C(SI - A)^{-1} B$$

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

pxm $\begin{cases}\text{p=1}\\ \text{m=2}\end{cases}$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο (ΕΚΠ παρονομαστών)

$$p(s)=(s+1)(s+2)=s^2+3s+2\rightarrow p_0=2, p_1=3$$

$$\downarrow$$

$$n=2$$

ΔΙΑΣΤΑΣΗ διανύσματος κατάστασης x(t): nmx1

4x1

$$p(s)H(s)=\begin{bmatrix}s+2 & 2(s+1)\end{bmatrix}=s\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}}_{H_1}+\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}}_{H_0}$$

$$A=\left[\begin{array}{c|c}O_2 & I_2\\ \hline -2I_2 & -3I_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}0&0&1&0\\0&0&0&1\\ \hline -2&0&-3&0\\0&-2&0&-3\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{c}O_m\\ \hline I_m\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0&0\\0&0\\ \hline 1&0\\0&1\end{array}\right]$$

$$C=\left[\begin{array}{c|c}H_0 & H_1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}2&2&1&2\end{bmatrix}$$

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s(s+1)} & \dfrac{2s+4}{s(s+1)}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+1}\end{bmatrix}$$

p=2
m=2
n=2
nmx1=4x1

$$p(s)=s(s+1)=s^2+s,\quad p_0=0, p_1=1$$

$$p(s)H(s)=\begin{bmatrix}s+2 & 2s+4\\ s & 2s\end{bmatrix}=s\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}_{H_1}+\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{H_0}$$

$$A=\left[\begin{array}{c|c}O_2 & I_2\\ \hline -p_0I_2 & -p_1I_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right],$$

$$B=\left[\begin{array}{c}O_2\\ \hline I_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\\ \hline 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right], C=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΦΑΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΑΓΩΝΙΑ ΜΟΡΦΗ

$$\Lambda = T^{-1} A^{*} T$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ΕΛΕΓΞΙΜΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΒΑΣΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ

παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\exists r(t) : x(t_0) \to x(t_f),$$

$$(t_f - t_0) \geq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (α)

$$\dot{z} = \Lambda z + B^{*} r,$$ **διαγωνοποιημένο**

ικανή και αναγκαία συνθήκη: **καμιά γραμμή του B^* μηδενική**

ΘΕΩΡΗΜΑ (β)

$$S = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2 B \,\vdots \cdots \vdots\, A^{n-1} B \right]$$ **nxnm**

τάξη S=n

κανονική μορφή φάσης $\overset{\text{ικανή \& αναγκαία}}{\Leftrightarrow}$ **ΕΛΕΓΞΙΜΟ**

ΕΛΕΓΞΙΜΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΞΟΔΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

y(t) ελέγξιμο **αν**

$$\exists r(t) : y(t_0) \to y(t_f),$$
$$(t_f - t_0) \geq 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$Q = \left[D \vdots CB \vdots CAB \vdots CA^2 B \vdots \cdots \vdots CA^{n-1} B \right]$$

$$Q : px(m+1)n$$

τάξη: **Q=p**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΞΟΔΟΥ

ΒΑΣΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ: $\mathbf{r(t),\ y(t) \rightarrow x(t_0)}$
$\mathbf{t \in [t_0,\ t_f]}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: **x(t)** παρατηρησιμο:

α)

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + B^{*} r(t)$$

$$y(t) = C^{*}(t) + Dr(t)$$

$$z = T^{-1} x$$

ικανή και αναγκαία συνθήκη: **καμιά στήλη του C* μηδενική**

ομγ

β)

$$R^{T} = \left[C^{T} \vdots A^{T} C^{T} \vdots (A^{T})^{2} C^{T} \vdots \cdots \vdots (A^{T})^{n-1} C^{T} \right]$$

τάξη $\mathbf{R^T = n}$

ΕΛΕΓΞΙΜΟ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

$$S^{*} = T^{-1} S, \qquad Q^{*} = Q$$

$$R^{*T} = T^{T} R^{T}$$

ΣΧΕΣΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΥ, ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΥ ΚΑΙ Σ.Μ.

$$S_j = \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \cdots \vdots A^{j-1} B \right]$$

$$R_j^T = \left[C^T \vdots A^T C^T \vdots \cdots \vdots (A^T)^{j-1} C^T \right]$$

α, β, ακέραιοι:

τάξη S_a= τάξη S_{a+1}= → τάξη S_i= τάξη S_a, $\forall i>a$
τάξη R_b= τάξη R_{b+1}= → τάξη R_i= τάξη R_b, $\forall i>b$

α: δείκτης **ελέγξιμου**
β: δείκτης **παρατηρησιμου**

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

α. σύστημα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο → τάξη **S=** τάξη **R=n**
β. τάξη $R_b S_a$=n
γ. n= ελάχιστη διάσταση πραγμάτωσης

H(s): απαλοιφή πόλων και μηδενικών →
μη ελέγξιμο ή,
μη παρατηρήσιμο ή,
και τα δύο

H(s): χωρίς απαλοιφή πόλων και μηδενικών →
μπορεί να περιγραφεί σαν ένα
ελέγξιμο και **παρατηρήσιμο** σύστημα