ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ / ΜΟΝΤΕΛΟ

ΣΗΜΑΣΙΑ

ΕΙΔΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ:

Περιγραφές **εισόδου - εξόδου**

Ολοκληρωτικές - διαφορικές Εξισώσεις (δίκτυα)

Συνάρτηση Μεταφοράς (δίκτυα, μηχανικά συστήματα)

Κρουστική Απόκριση (περιορισμοί: χρονικά αμετάβλητο και $y^{(n)}(0)=0$)

Εξισώσεις κατάστασης

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: $x(t_0)$, $r(t)$, $t \geq t_0$, $f(x(t), r(t), t) \rightarrow x(t)$, $\forall\, t \geq t_0$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), r(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), r(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

ΜΟΝΤΕΡΝΑ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

1. Ανάγκη για χρησιμοποίηση πιο ρεαλιστικών μοντέλων συστημάτων
2. Έμφαση στον άριστο έλεγχο
3. Ανάπτυξη τεχνολογίας Η-Υ
4. Μειονεκτήματα προηγουμένων μεθόδων
5. Εφαρμογή γνωστών μεθόδων σε άλλα πεδία γνώσης

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

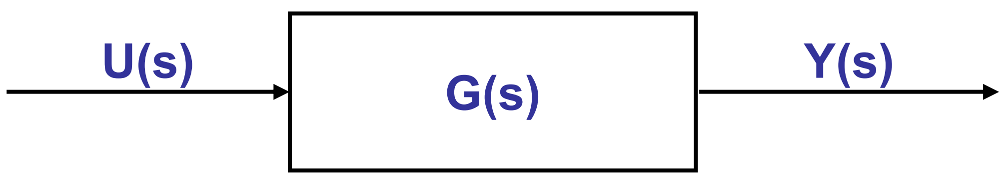
$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{1}(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$
$$n \geq m$$

$L(\bullet)$ **με μηδενικές αρχικές συνθήκες**

$$Y(s)\left[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right] =$$
$$= U(s)\left[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right]$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$



ΣΗΜΑΣΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

- **Περιγράφουν μεγάλες κατηγορίες συστημάτων**
- **Διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης → εύκολα επεξεργάσιμες**
- **Μελέτη θεμελιωδών προβλημάτων:**
  - **Ευστάθεια**
  - **Παρατηρήσημο**
  - **Ελέγξιμο**
- **Πληρότητα περιγραφής**

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΗ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Αν μπορούν να περιγραφούν με ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τότε →

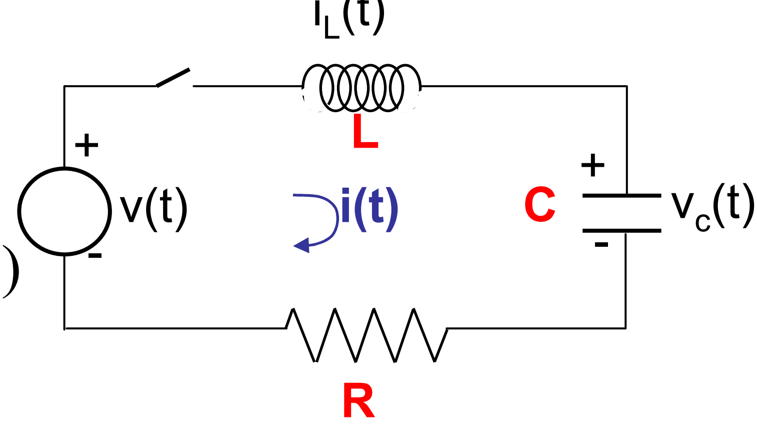
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Br(t), \qquad t \in [t_0, T]$$
$$y(t) = Cx(t) + Dr(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$	**πίνακας κατάστασης**
$B \in \quad ^{nxm}$	
$C \in \mathbb{R}^{pxn}$	**πίνακας εξόδου**
$D \in \mathbb{R}^{pxm}$	**απευθείας πίνακας**

Αν $\quad x(t_0) = x_0 = 0 \quad : H(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D$

$$h(t) = L^{-1}H(s)$$

Παράδειγμα 1



$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt=v(t)$$

$$LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=V(s)$$

$$H(s)=\frac{I(s)}{V(s)}=\frac{Cs}{LCs^2+RCs+1}$$ ή (με έξοδο $V_R(s)$)

$$H'(s)=\frac{V_R(s)}{V(s)}=\frac{RCs}{LCs^2+RCs+1}$$ έστω L=1H, C=1F, R=1Ω

$$h(t)=L^{-1}H'(s)=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+s+1}\right]=\ldots$$

$$i_L(0)=I_0,\quad v_C(0)=V_0$$

$$x_1(t)\triangleq i_L(t),\ x_2(t)\triangleq Cv_c(t)\Rightarrow x_2(t)\triangleq\int_0^t i(t)dt$$

$$\dot{x}_2(t)=i(t)=i_L(t)=x_1(t)$$

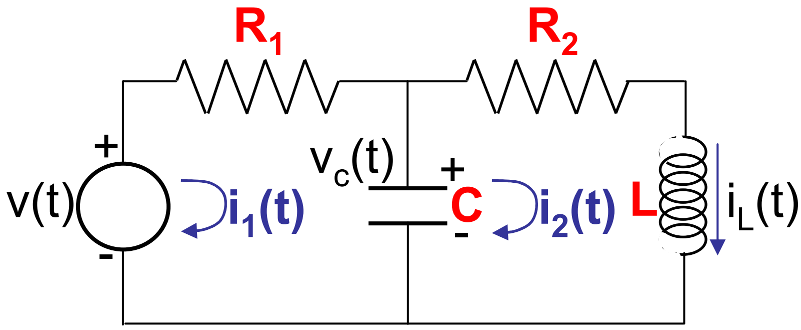
$$\dot{x}_1=-\frac{R}{L}x_1(t)-\frac{1}{LC}x_2(t)+\frac{1}{L}v(t)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}v(t)$$

$$y(t)=v_R(t)=Ri(t)=Rx_1(t)\qquad y(t)=\begin{bmatrix}R & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_L(0)\\ cv_c(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_0\\ CV_0\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2



$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)dt - \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)dt = v(t)$$

$$-\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)dt + R_2 i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)dt = 0$$

$$v_c(0) = V_0, \qquad i_L(0) = I_0$$

$$\left(R_1 + \frac{1}{Cs}\right) I_1(s) - \frac{1}{Cs} I_2(s) = V(s)$$

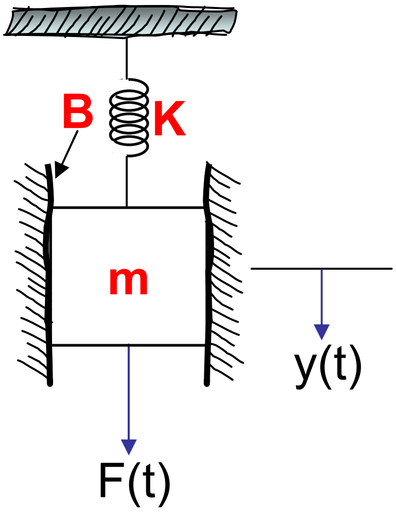
$$-\frac{1}{Cs} I_1(s) + \left(R_2 + Ls + \frac{1}{Cs}\right) I_2(s) = 0$$

$$I_1(s) = \left[LCs^2 + R_2 Cs + 1\right] I_2(s)$$

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{V(s)} = \ldots = \frac{1}{R_1 LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2}$$

$$h(t) = L^{-1}\left[H(s)\right]$$

Παράδειγμα 3



y(t): απόσταση
K: σταθερά ελατηρίου
m: μάζα
B: συντελεστής τριβής

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=f(t)$$

$$y(0)=y_0,\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}=u(0)=u_0$$

$$\left.\begin{array}{l} ms^2Y(s)+BsY(s)+KY(s)=F(s) \\ H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}=\dfrac{1}{ms^2+Bs+k} \end{array}\right\}$$

για $y_0=0$, $u_0=0$

$$x_1(t)=y(t)$$

$$x_2(t)=\dot{y}(t)=\dot{x}_1(t)$$

$$m\dot{x}_2(t)+Bx_2(t)+kx_1(t)=f(t)\Rightarrow$$

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{k}{m}x_1(t)-\frac{B}{m}x_2(t)+\frac{1}{m}f(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

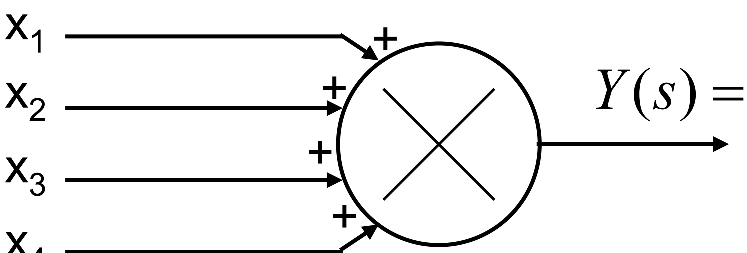
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)$$

$$\dot{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y^{(1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$$

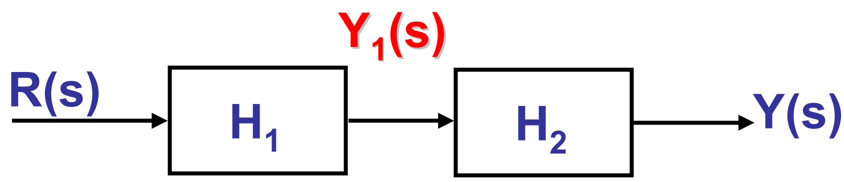
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΒΑΘΜΙΔΩΝ

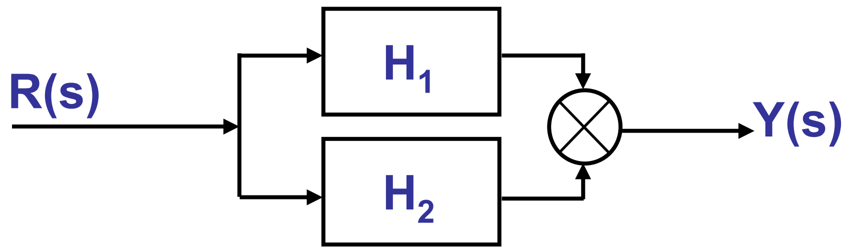
- εποπτική περιγραφή
- συσχέτιση μεταξύ διαφόρων στοιχείων του συστήματος
- βαθμίδα: περιγραφή εισόδου – εξόδου
- σημασία συνδεσμολογίας - μετατροπείς

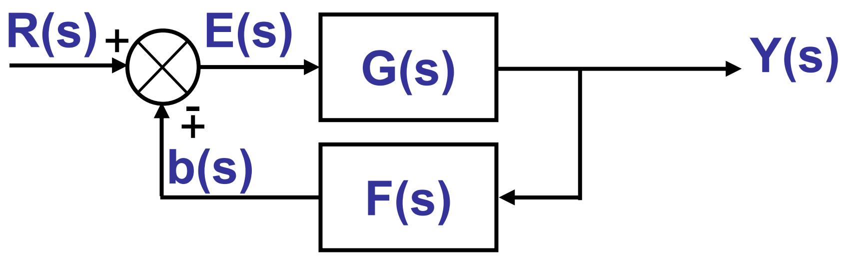


$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s) + X_4(s)$$

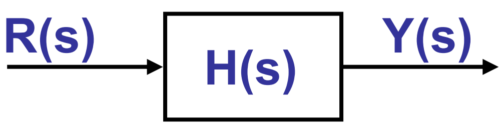


- σημείο αθροίσεως
- βαθμίδες σε σειρά
- βαθμίδες παράλληλα
- μετατροπή κλειστού συστήματος σε ανοικτό

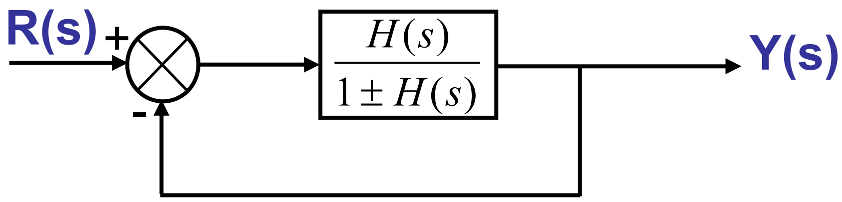




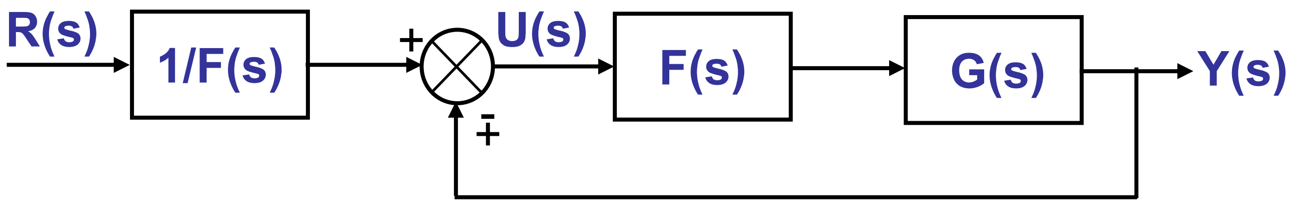
$$H(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)F(s)}$$



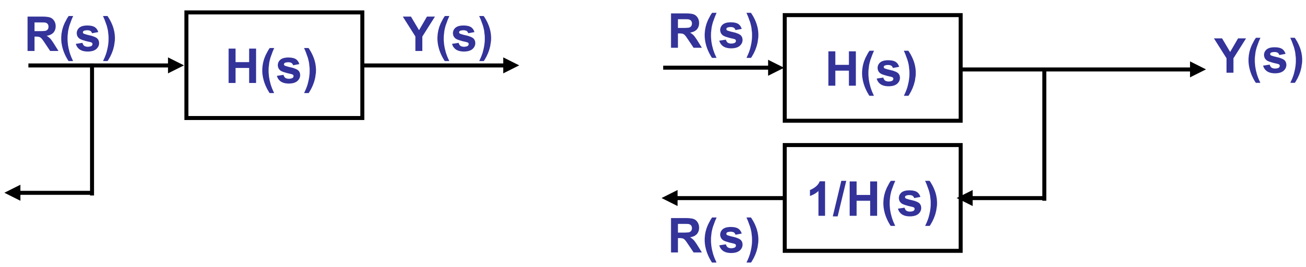
- μετατροπή ανοικτού συστήματος σε κλειστό



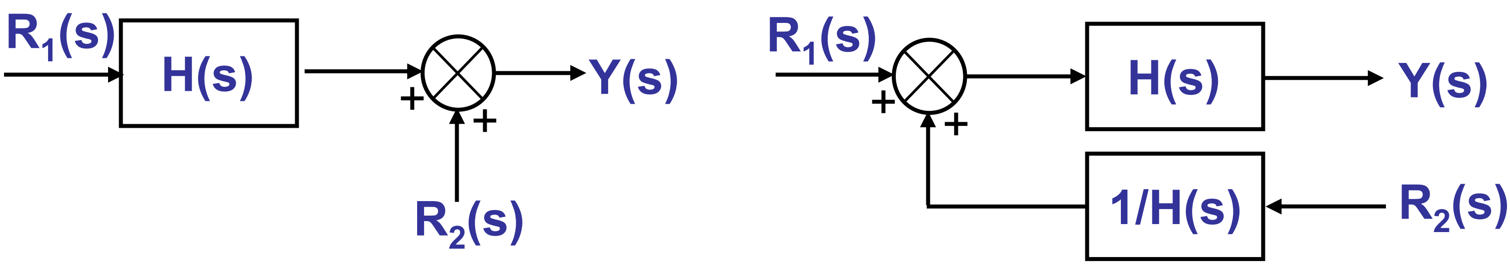
- μετατροπή της ανατροφοδότησης F(s) σε μοναδιαία



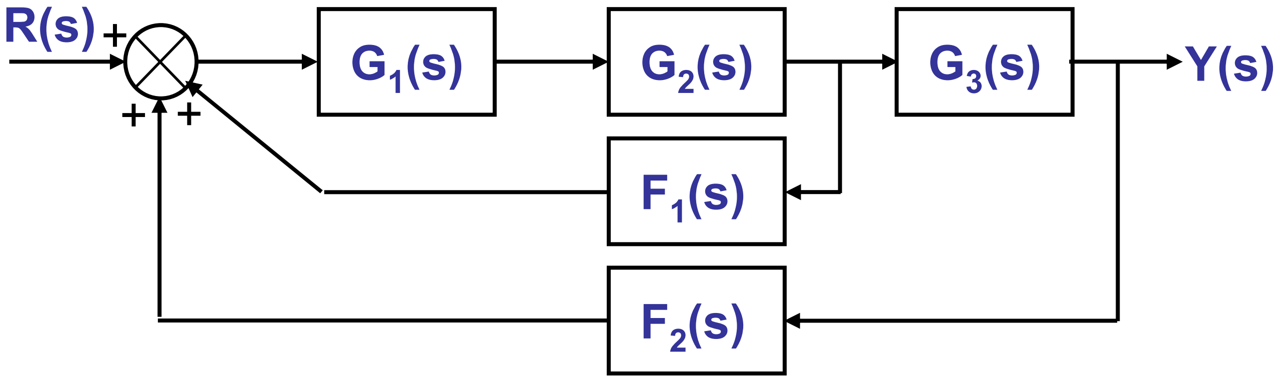
- μετατόπιση σημείου λήψεως



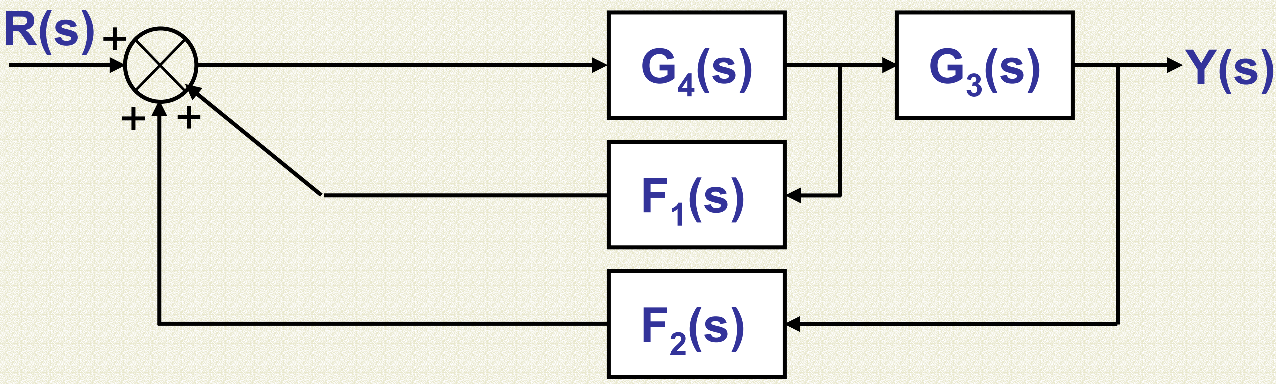
- μετατόπιση σημείου αθροίσεως



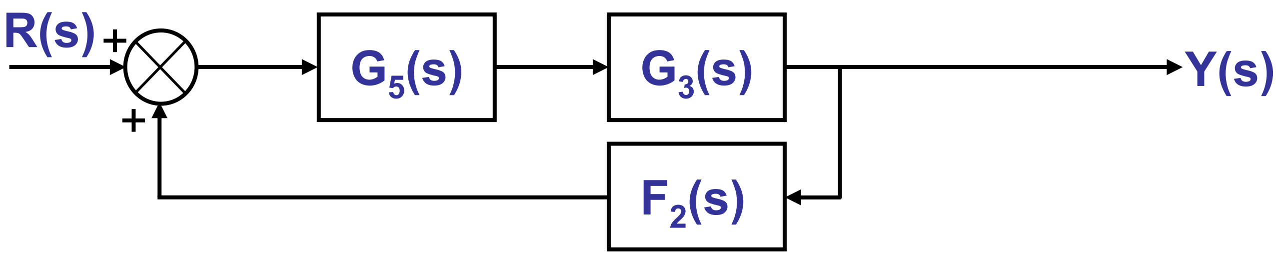
Παράδειγμα 4



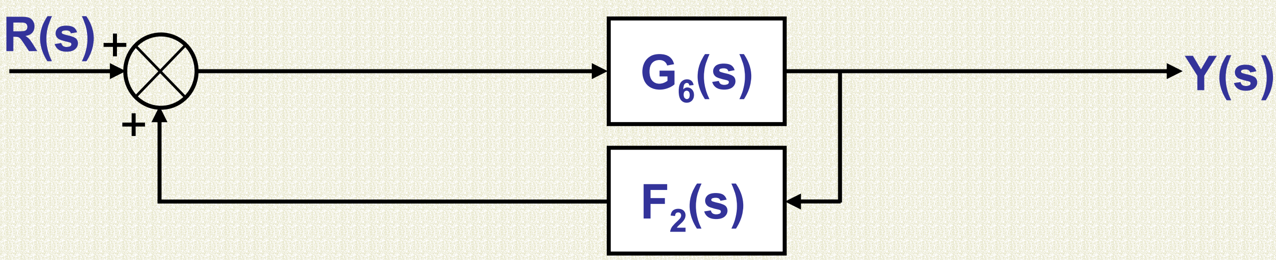
$$G_4(s) = G_1(s)G_2(s)$$



$$G_5(s) = \frac{G_4(s)}{1 - F_1(s)G_4(s)}$$

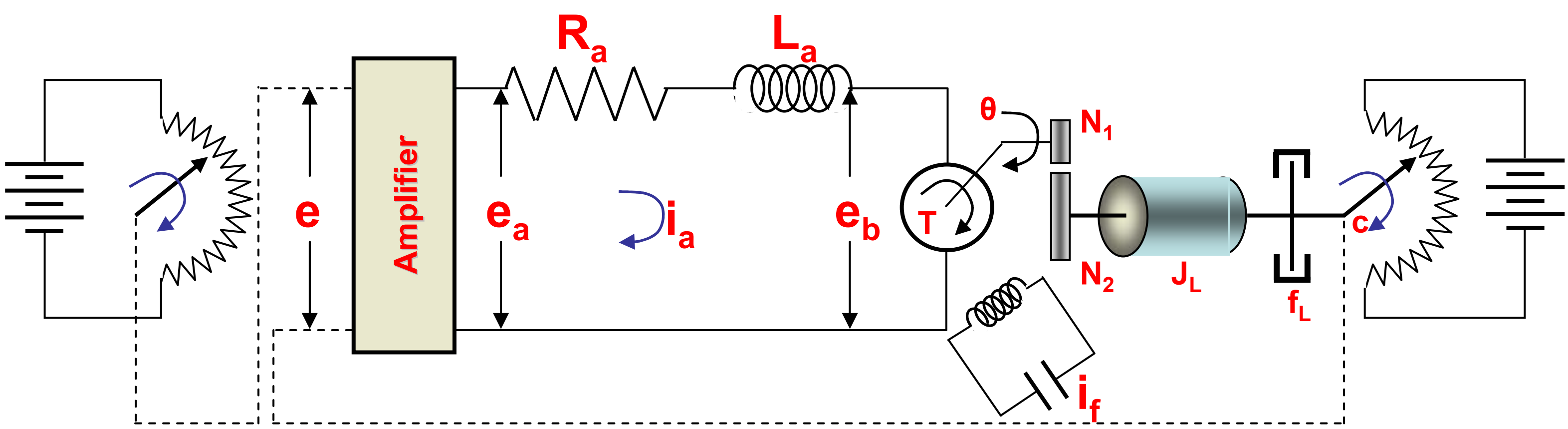


$$G_6(s) = G_5(s)G_3(s)$$



$$H(s) = \frac{G_6(s)}{1 - F_2(s)G_6(s)}$$

ΣΕΡΒΟΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΘΕΣΗΣ



ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ	
r	: γωνιακή μετατόπιση εισόδου αναφοράς
c	: γωνιακή μετατόπιση εξόδου
θ	: γωνιακή μετατόπιση κινητήρα
κ_1	: κέρδος ανιχνευτή σφάλματος ποτενσιομέτρου =24/π
k_p	: κέρδος ενισχυτή=10volts/volt
e_a	: τάση οπλισμού
e_b	: τάση emf
R_a	: αντίσταση οπλισμού =0,2Ω
L_a	: επαγωγή οπλισμού (αμελητέα)
i_a	: ρεύμα
k_b	: σταθερά $5{,}5X10^{-2}$Volts
k	: σταθερά ροπής κινητήρα $6X10^{-5}$
J_m	: ροπή αδράνειας κινητήρα $1X10^{-5}$
f_m	: συντελεστής τριβής κινητήρα αμελητέος
J_c	: ροπή αδράνειας φορτίου $=4.4X10^{-3}$
f_l	: συντελεστής τριβής φορτίου $4X10^{-2}$
	$n=N_1/N_2=1/10$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

❑ ΑΝΙΧΝΕΥΤΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΟΤΕΝΣΙΟΜΕΤΡΟΥ

$$E(s) = K_1(R(s) - C(s)) = 7{,}64(R(s) - C(s))$$

❑ ΕΝΙΣΧΥΤΗΣ

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10E(s)$$

❑ ΚΙΝΗΤΗΡΑΣ DC

$$J = J_m + n^2 J_L = 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$
$$f = f_m + n^2 f_L = 4 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

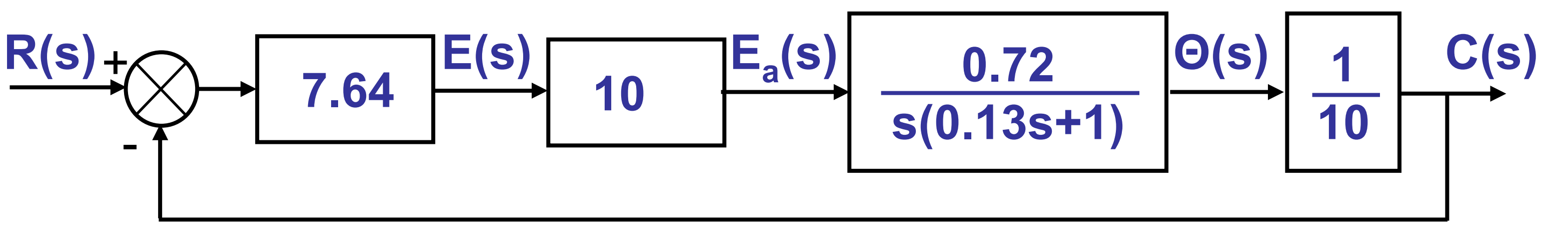
η'

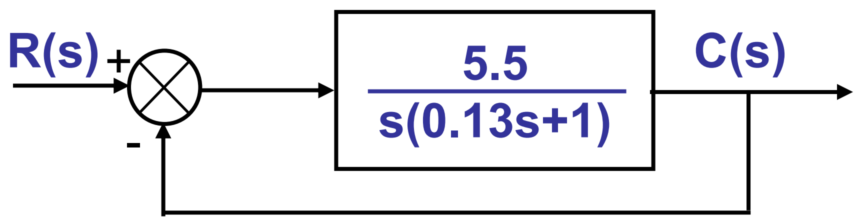
$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s + 1)}$$

$$K_m = \frac{K}{R_a f_L + KK_b} = 0.72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a f_L + KK_b} = 0.13$$

❑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΒΑΘΜΙΔΩΝ

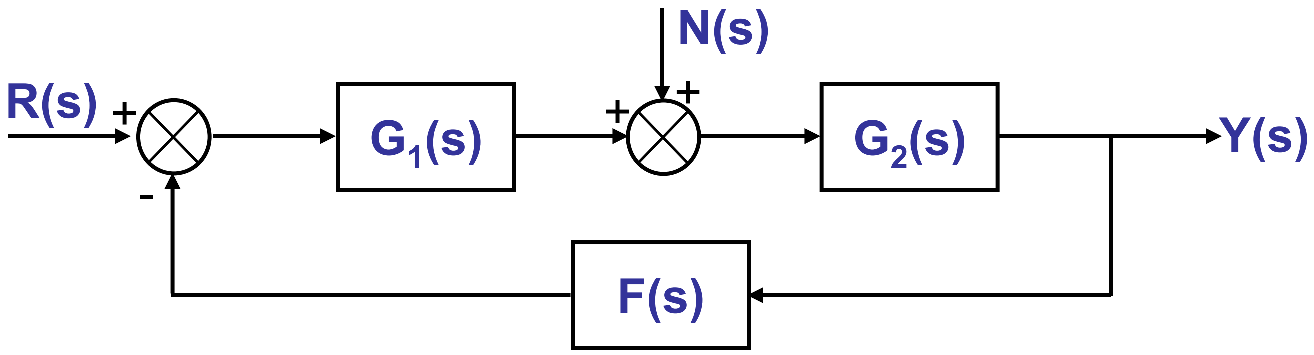




$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{42.3}{s^2 + 7.7s + 42.3}$$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ ΜΕ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ



$$\frac{Y_n(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)}$$

$$\frac{Y_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)}$$

$$Y(s) = Y_N(s) + Y_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)}\left[G_1(s)R(s) + N(s)\right]$$

έστω $\left|G_1(s)F(s)\right| >> 1 \Rightarrow$ ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ

$$\left|G_1(s)G_2(s)F(s)\right| >> 1 \Rightarrow \frac{Y_R(s)}{R(s)} \to \frac{1}{F(s)}$$

Ανεξάρτητη των G_1, G_2, αντιστρόφως ανάλογη της F(s).
Μείωση ευαισθησίας.

- **ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ $\Rightarrow$Y(s)$\cong$R(s)**

- **ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ**

ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗ - ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΥΠΟΘΕΣΗ: ❑ οι μεταβλητές έχουν αμελητέα απόκλιση από κάποιο σημείο λειτουργίας

έστω: ❑ y(t)=f(u(t)).

σημείο λειτουργίας: $\boxed{\overline{u}(t), \overline{y}(t)}$

ΣΕΙΡΑ TAYLOR

$$y(t) = f(u(t)) = f(\overline{u}(t)) + \frac{df}{du}(u - \overline{u}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{du^2}(u - \overline{u})^2 + \ldots$$

- αγνοούμε τους όρους ανώτερης τάξης

$$y(t) = \overline{y}(t) + K(u(t) - \overline{u}(t))$$

$$\overline{y}(t) = f(\overline{u}(t)), \qquad K = \frac{df}{du}\Big|_{u=\overline{u}}$$

$$y(t) - \overline{y}(t) = K(u(t) - \overline{u}(t))$$

έστω:

- **y(t)=f(u_1(t), u_2(t))**

ΣΕΙΡΑ TAYLOR ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ: $\overline{u}_1, \overline{u}_2$

$$y = f(\overline{u}_1, \overline{u}_2) + \left[\frac{df}{du_1}(u_1 - \overline{u}_1) + \frac{df}{du_2}(u_2 - \overline{u}_2) \right] +$$

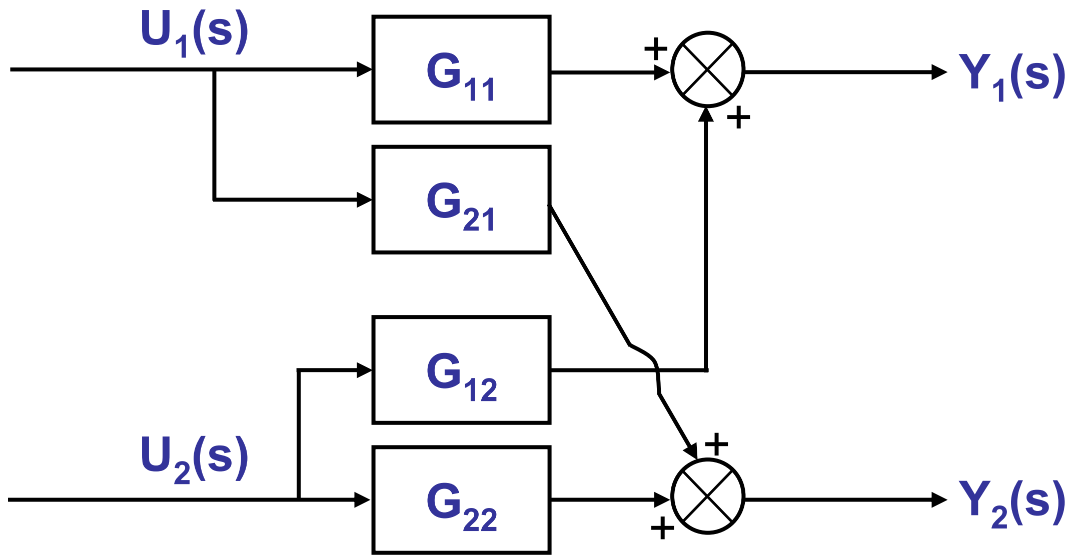
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2 f}{du_1{}^2}(u_1 - \overline{u}_1)^2 + 2\frac{d^2 f}{du_1 du_2}(u_1 - \overline{u}_1)(u_2 - \overline{u}_2) + \frac{d^2 f}{du_2{}^2}(u_2 - \overline{u}_2)^2 \right] + ..$$

$$y - \overline{y} = K_1(u_1 - \overline{u}_1) + K_2(u_2 - \overline{u}_2)$$

$$\overline{y}(t) = f(\overline{u}_1(t), \overline{u}_2(t))$$

$$K_1 = \frac{df}{du_1}\Big|_{u_1 = \overline{u}_1}, \qquad K_2 = \frac{df}{du_2}\Big|_{u_2 = \overline{u}_2}$$

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ



$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$
$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

ή

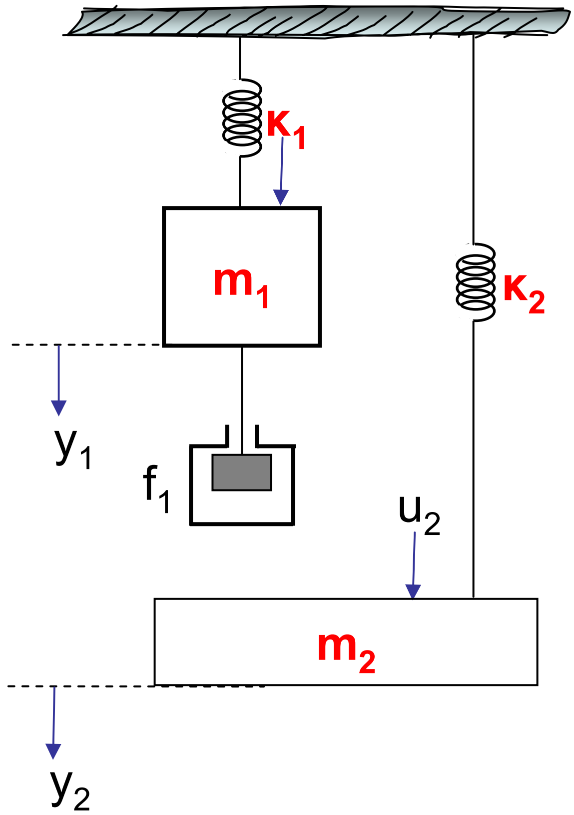
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

ΓΕΝΙΚΑ:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \cdots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ



$$m_1\ddot{y}_1 + f_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1 y_1 = u_1$$
$$m_2\ddot{y}_2 + f_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 y_2 = u_2$$

$$(m_1 s^2 + f_1 s + k_1)Y_1(s) - f_1 s Y_2(s) = U_1(s)$$
$$(m_2 s^2 + f_1 s + k_2)Y_2(s) - f_1 s Y_1(s) = U_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2 s^2 + f_1 s + k_2}{\Delta} & \dfrac{f_1 s}{\Delta} \\ \dfrac{f_1 s}{\Delta} & \dfrac{m_1 s^2 + f_1 s + k_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$