



ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εργασία

Γεώργιος Α. Γραββάνης

Καθηγητής,

Τμήμα Η.Μ.&Μ.Υ., Δ.Π.Θ.

Email: ggravvan@ee.duth.gr

Δημήτριος Α. Γεωργίου

Καθηγητής,

Τμήμα Η.Μ.&Μ.Υ., Δ.Π.Θ.

Email: dgeorg@ee.duth.gr

Ξάνθη

Οκτώβριος 2014

ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι φοιτητές θα εκπονήσουν τις εργασίες που προτείνονται παρακάτω. Για όλα τα θέματα θα παρασχεθεί πλήρης βιβλιογραφική υποστήριξη (σχετικά βιβλία που υπάρχουν στη βιβλιοθήκη, διευθύνσεις ιστοθέσεων κλπ.).

Η εργασία αυτή θα έχει τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά:

- **Υποβολή της εργασίας:** Πρέπει να υποβληθεί σε προκαθορισμένο χρόνο. Η εργασία θα πρέπει να γραφεί σε επεξεργαστή κειμένου και το σύνολο της εργασίας με τα αντίστοιχα προγράμματα θα αποθηκευτούν σε CD-ROM, στο οποίο θα αναγράφονται ευκρινώς τα πλήρη στοιχεία των φοιτητών που εκπόνησαν την εργασία (ονοματεπώνυμο, αριθμός μητρώου). Στην περίπτωση κατά την οποία ο εκτελέσιμος κώδικας περιέχει κάποιο βασικό σφάλμα και η εφαρμογή δεν εκτελείται, τότε η εργασία θα θεωρείται μη αξιολογήσιμη. Επίσης η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί εκτυπωμένη.
- **Παρουσίαση της εργασίας:** Να ακολουθηθεί το σχέδιο
 - **Εξώφυλλο, που θα περιέχει τα ακόλουθα**
 1. Τίτλος μαθήματος
 2. Τίτλος εργασίας
 3. Ονόματα φοιτητή, αριθμό μητρώου και υπογραφή
 4. Όνομα διδάσκοντα
 - **Υπόλοιπες σελίδες, να αναφέρονται διαδοχικά**
 1. Πρόλογος, σχετικός με τα θέματα
 2. Μέθοδος επίλυσης με βιβλιογραφικές αναφορές
 3. Λίστα προγραμμάτων και ερμηνεία κώδικα
 4. Οδηγίες χρήσης (προγράμματος, περιβάλλον, κτλ)
 5. Όλα τα δεδομένα εισόδου πρέπει να τυπωθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των προγραμμάτων

Η αξιολόγηση της εφαρμογής θα βασισθεί κυρίως στους εξής παράγοντες:

- Στην ακρίβεια και ταχύτητα επίτευξης του ορθού αποτελέσματος.
- Στη φιλικότητα και την επαγγελματικότητα του περιβάλλοντος επεξεργασίας, την ύπαρξη απλού, φιλικού και αποδοτικού help και την τεκμηρίωση της εφαρμογής.
- Σε λεπτομερή προφορική συνέντευξη του κάθε φοιτητή.

Οι υποεργασίες θα πρέπει να υλοποιηθούν σε MATLAB.

ΕΡΓΑΣΙΑ

Υποεργασία 1

A) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$. Να βρεθεί το τρίτου βαθμού πολυώνυμο του Taylor για την συνάρτηση $f(x)$ στο $x_0=1$ και να προσεγγισθεί το $e^{-0.99}$. Πόσα δεκαδικά ψηφία ακρίβειας αναμένονται;

B) Το πολυώνυμο του Taylor βαθμού n για την συνάρτηση $f(x)=e^x$ είναι $\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$. Με χρήση του πολυωνύμου Taylor ενάτου βαθμού, να βρεθεί μία προσέγγιση του e^{-5} βάσει των εξισώσεων

$$i) e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^9 \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$$

$$ii) e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!}}$$

Μια προσεγγιστική τιμή σε 3 ψηφία είναι 6.74×10^{-3} . Ποια από τις δυο εξισώσεις (i ή ii) δίνει καλύτερη προσέγγιση και γιατί;

Γ) Να δειχθεί ότι

$$i) \Delta \nabla f = \delta^2 f$$

$$ii) \mu + \delta/2 = E^{1/2}$$

Υποεργασία 2

A) Τα πολυώνυμα Legendre ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), \quad n \geq 0, \quad \text{με } T_0(x) = 1 \text{ και } T_1(x) = x.$$

Να υπολογισθούν τα πολυώνυμα $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ και $T_5(x)$ καθώς επίσης και οι προσεγγιστικές ρίζες των πολυωνύμων $T_3(x)$, $T_4(x)$ και $T_5(x)$ με ακρίβεια $\varepsilon=10^{-6}$.

B) Τα δεδομένα στον ακόλουθο πίνακα προέρχονται από αστρονομικές παρατηρήσεις ενός τύπου μεταβλητών αστερών, που καλείται «μεταβλητός Κηφείδης» και αντιπροσωπεύει μεταβολές του φαινομενικού μεγέθους με το χρόνο

Χρόνος	0.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
Φαινομ μέγεθος	0.302	0.185	0.106	0.093	0.240	0.579	0.561	0.468	0.302

Χρησιμοποιώντας κάθε μία από τις τρεις τελικές συνθήκες να υπολογισθούν κυβικές σφηνοειδείς και να συγκριθούν οι παρεμβαλλόμενες τιμές από κάθε σφηνοειδή συνάρτηση σε χρονικό διάστημα $\Delta t=0.05$

(Υπόδειξη: τελική συνθήκη 1: $S_1=S_n=0$ φυσική σφηνοειδής;

τελική συνθήκη 2: $S_1=S_2, S_n=S_{n-1}$;

τελική συνθήκη 3: S_1 και S_n είναι γραμμικές προεκβολές.)

Υποεργασία 3

A) Υποθέστε ότι για τα γραμμικά συστήματα $Au=s$ και $\tilde{A}\tilde{u}=s$, ισχύει $\|A-\tilde{A}\|<1/\|A^{-1}\|$,

όπου A και \tilde{A} είναι μη ιδιότυποι πίνακες (με \tilde{A} να αποτελεί ένα «ελαφρά-διαταραγμένο» πίνακα του A). Να δειχθεί ότι, αν $u \neq 0$ ισχύει

$$\frac{\|u-\tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \frac{\|I\|k(A)}{1-k(A)\left(\|A-\tilde{A}\|/\|A\|\right)} \frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|}$$

όπου $k(A)$ είναι ο αριθμός ευαισθησίας (condition number) του πίνακα A

B) Έστω A ένας $(n \times n)$ τετραγωνικός πίνακας με $\|A\|<1$, όπου $\|\cdot\|$ είναι μία νόρμα πινάκων. Να δειχθεί ότι

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Υποεργασία 4

A) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών οι τιμές των παραμέτρων a_0, a_1, b_0, b_1 του προσεγγιστικού τύπου

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx = h(a_0 f_0 + a_1 f_1) + h^2(b_0 f'_0 + b_1 f'_1)$$

όπου $f'_i = f'(x_i)$ είναι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x και $x_i = x_0 + ih, i=0,1$.

B) Με βάση το τύπο

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

και το πέμπτου βαθμού πολυώνυμο του Taylor σε συνδυασμό με το τύπο προεκβολής του Richardson ναδειχθεί ότι

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

Γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x^2 y^2} dy dx$$

με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Simpson.

Υποεργασία 5

A) Δίνεται η μέθοδος πολλαπλού βήματος

$$y_{i+1} + \frac{3}{2} y_i - 3y_{i-1} + \frac{1}{2} y_{i-2} = 3hf(x_i, y_i), \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

με αρχικές τιμές y_0, y_1, y_2 .

i) Να προσδιοριστεί το τοπικό σφάλμα της μεθόδου

ii) Να σχολιάσετε την συμβατότητα (consistency), ευστάθεια και σύγκλιση της μεθόδου

B) Να υπολογισθεί μία προσεγγιστική λύση του συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$u_1' = u_2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u_1(0) = 3$$

$$u_2' = -u_1 + 2e^{-t} + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad u_2(0) = 0$$

με χρήση της μεθόδου Runge-Kutta τετάρτης τάξης με βήμα $h=0.05$. Να συγκριθούν οι προσεγγιστικές λύσεις με τις αντίστοιχες θεωρητικές λύσεις του συστήματος.

Υποεργασία 6

A) Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα $Hu=s$, όπου H είναι ο ακόλουθος (4×4) πίνακας Hilbert

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/12 \\ 77/60 \\ 57/60 \\ 319/420 \end{bmatrix}$$

με την μέθοδο της LU παραγοντοποίησης. Να δειχθεί ότι ο πίνακας H εμφανίζει «άσχημη συμπεριφορά» (ill-conditioned matrix) δείχνοντας ότι είναι «σχεδόν ιδιότυπος» (nearly singular). Να χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς τρία και πέντε σημαντικά ψηφία (με αποκοπή) αντίστοιχα και να συγκριθούν τα αποτελέσματα. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα.

B) Υποθέστε ότι σε ένα βιολογικό σύστημα υπάρχουν n-είδη ζώων και m-πηγές τροφής. Υποθέστε επίσης ότι x_j είναι ο πληθυσμός των j ειδών για κάθε τιμή $j=1,2,\dots,n$; b_i είναι η διαθέσιμη ημερησία προμήθεια της i-τροφής και a_{ij} είναι το ποσό της i-τροφής που καταναλώνεται κατά μέσο όρο από το μέλος των j-ειδών. Το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ διαστάσεων $m \times n$ αντιπροσωπεύει μια κατάσταση ισορροπίας, όπου υπάρχει μια ημερήσια προμήθεια τροφής που αντιστοιχεί ακριβώς στη μέση ημερήσια κατανάλωση κάθε είδους.

(i) Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix}$$

υπάρχει αρκετή ποσότητα τροφής για να ικανοποιήσει τη μέση ημερησία κατανάλωση.

(ii) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ζώων κάθε είδους που μπορεί να προστεθεί ανεξάρτητα στο σύστημα, έτσι ώστε η προμήθεια τροφής να ικανοποιεί την κατανάλωση

(iii) Εάν το είδος 1 εκλείψει πόση ανεξάρτητη αύξηση κάθε εναπομείναντος είδους μπορεί να πραγματοποιηθεί;

(iv) Αν το είδος 2 εκλείψει επίσης πόση ανεξάρτητη αύξηση κάθε εναπομείναντος είδους μπορεί να πραγματοποιηθεί;