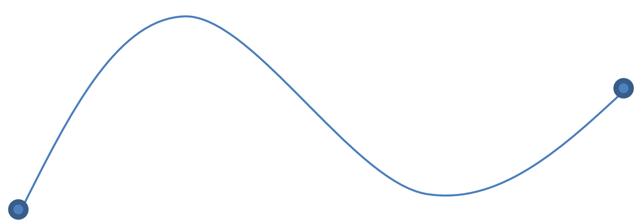
Κατά τμήματα πολυωνιμικές προσεγγίσεις (Splines)

- Στη Μηχανική spline είναι μια ευλύγιστη μεταλλική λάμα ή μια πλαστική λωρίδα που μπορεί να πάρει διάφορα σχήματα αν τη λυγίσουμε κατάλληλα



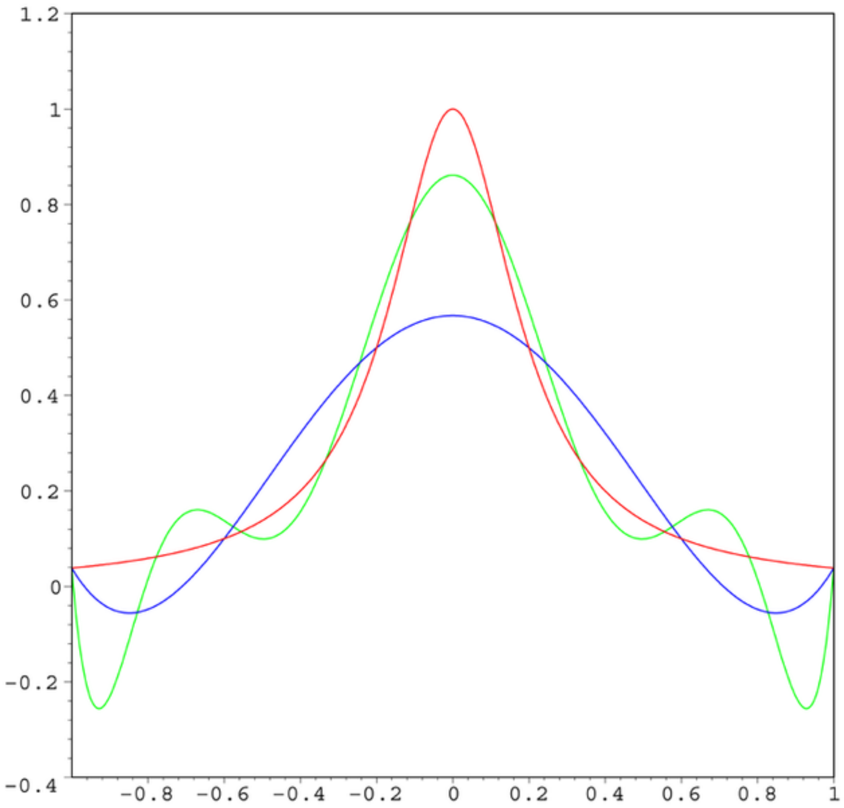
Κατά τμήματα πολυωνυμικές προσεγγίσεις (Splines)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Στα μαθηματικά, ένα spline είναι μια αρκετά ομαλή πολυωνυμική συνάρτηση που ορίζεται κατά τμήματα, και διατηρεί έναν υψηλό βαθμό ομαλότητας στα σημεία όπου συνδέονται τα διαδοχικά πολυώνυμα τρίτου βαθμού.

Κατά τμήματα πολυωνυμικές προσεγγίσεις (Splines)

- Η παρεμβολή με spline χρησιμοποιεί χαμηλού-βαθμού πολυώνυμα, αποφεύγοντας το φαινόμενο Runge, που συναντάται στην εφαρμογή πολυωνυμικών προσεγγίσεων μεγαλύτερου βαθμού. Στο σχήμα, η κόκκινη γραμμή είναι η καμπύλη Runge, η γαλάζια είναι 5^{ου} βαθμού παρεμβολικό πολυώνυμο (χρησιμοποιεί 6 ισαπέχοντα ορίσματα), ενώ η πράσινη είναι η γραφική παράσταση παρεμβολικού πολυωνύμου 9^{ου} βαθμού, που χρησιμοποιεί 10 ισαπέχοντα ορίσματα.



Κυβικά (Cubic) Splines

- Επιλέγονται δυο διαδοχικά σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i)
- Ένα κυβικό spline $y(x)=p(x)$, που συνδέει αυτά τα δυο σημεία θα ικανοποιεί τις συνθήκες
  - $p(x_{i-1}) = y_{i-1}$
  - $p(x_i) = y_i$
  - $p'(x_{i-1}) = k_{i-1}$
  - $p'(x_i) = k_i$

Κυβικά (Cubic) Splines

- Για τον προσδιορισμό κάθε spline, θα χρησιμοποιηθεί η έννοια της καμπυλότητας
- Η καμπυλότητα της συνάρτησης $y = y(x)$ στο σημείο (x, y) δίνεται από τη σχέση

- $k = y''/(1+y'^2)^{3/2}$

Κυβικά (Cubic) Splines

- Η καμπυλότητα της συνάρτησης $y = y(x)$ στο σημείο (x, y) δίνεται από τη σχέση
- Οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να συμπεριληφθούν στην συμμετρική μορφή:
- $p = (1-t)y_{\iota-1} + ty_{\iota} + t(1-t)(a(1-t) + bt)$ (1)
- Όπου $t = (x-x_{\iota-1})/(x_{\iota} - x_{\iota-1})$
- και
  - $a=k_1(x_{\iota} - x_{\iota-1}) - (y_{\iota} - y_{\iota-1})$,
  - $b=-=k_1(x_{\iota} - x_{\iota-1}) + (y_{\iota} - y_{\iota-1})$,

Κυβικά (Cubic) Splines

- Η παράγωγος της (1) είναι
- $dp/dx = (dp/dt)(x_ι - x_{ι-1})^{-1}$
- ή $p' = [(y_ι - y_{ι-1})/(x_ι - x_{ι-1})] + (1-2t)[a(1-t)+bt]/(x_ι - x_{ι-1})$ (2)
- Ενώ η δεύτερη παράγωγος της (1) είναι
- $p'' = 2[b-2a+(a-b)3t](x_ι - x_{ι-1})^{-2}$ (3)

Κυβικά (Cubic) Splines

- Θέτουμε $x= x_{\iota-1}$ και $x= x_{\iota}$, στις (2) και (3)
- έτσι
- $dp/dx\ |_{x=x(i-1)} = k_{\iota-1}$, $dp/dx\ |_{x=x(i)} = k_{\iota}$
- $p''(x_{i-1}) = 2[b-2a](x_{\iota} - x_{\iota-1})^{-2}$
- $p''(x_{i}) = 2[a-2b](x_{\iota} - x_{\iota-1})^{-2}$

- ή $p' = [(y_{\iota} - y_{\iota-1})/(x_{\iota} - x_{\iota-1})] + (1-2t)[a(1-t)+bt]/(x_{\iota} - x_{\iota-1})$
- Ενώ η δεύτερη παράγωγος της (1) είναι
- $p'' = 2[b-2a+(a-b)3t](x_{\iota} - x_{\iota-1})^{-1}$

Κυβικά (Cubic) Splines

- Για τα n-1 πολυώνυμα p_i (x) , όπου i=0, 1, … ,n-1 θα ισχύει επιπλέον ότι $p'(x_{i-1})=p'(x_i)=k$ για i=2,3,…n-1 $p'(x_0)= k_0$, και $p'(x_n)= k_n$,

- Επιπλέον, $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$, i=1,2, … ,n-1

Κυβικά (Cubic) Splines

- Μετά από αυτά καταλήγουμε

$[k_{ι-1}/(x_ι–x_{ι-1})]+[(1/(x_ι–x_{ι-1}))+(1/(x_{ι+1}–x_ι))]2k_ι+(k_{ι+1}/(x_{ι+1}–x_ι))$
$= 3[((y_ι–y_{ι-1})/(x_ι –x_{ι-1})^2)+((y_{ι+1}–y_ι)/(x_{ι+1}–x_ι)^2)]$

και

$P_1''(x_0)=2[3(y_1–y_0)-(k_1+2k_0)(x_1–x_0)]/(x_1–x_0)^2=0$

$P_n''(x_0)=2[3(y_n–y_{n-1})-(k_n+2k_{n-1})(x_n–x_{n-1})]/(x_n–x_{n-1})^2=0$

Δηλαδή

Κυβικά (Cubic) Splines

Δηλαδή

$$\frac{2}{x_1 - x_0} k_0 \ + \frac{1}{x_1 - x_0} k_1 = 3 \ \frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$\frac{1}{x_n - x_{n-1}} k_{n-1} \ + \frac{2}{x_n - x_{n-1}} k_n = 3 \ \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^2}$$

Παρεμβολή με γραμμικά πολυώνυμα

Παράδειγμα:

Σημειώθηκαν οι τιμές της ταχύτητος αυτοπροωθούμενου βλήματος, οι οποίες εμφανίζονται στον πίνακα:

t (sec)	V (m/s)
0	0
10	227,04
20	517,35
15	362,78
16	?
22,5	602,97

Παρεμβολή με γραμμικά πολυώνυμα

- Παράδειγμα:
- Τοποθετούμε τα δεδομένα σε αύξουσα (ως προς τον χρόνο) σειρά

t (sec)	V (m/s)
0	0
10	227,04
15	362,78
16	?
20	517,35
22,5	602,97

Τετραγωνική Παρεμβολή

- Παράδειγμα:
- Λαμβάνουμε τρία σημεία από τα διαθέσιμα.
- Από αυτά περνά μοναδική καμπύλη δευτέρου βαθμού

t (sec)	V (m/s)
0	0
10	227,04
15	362,78
16	?
20	517,35
22,5	602,97

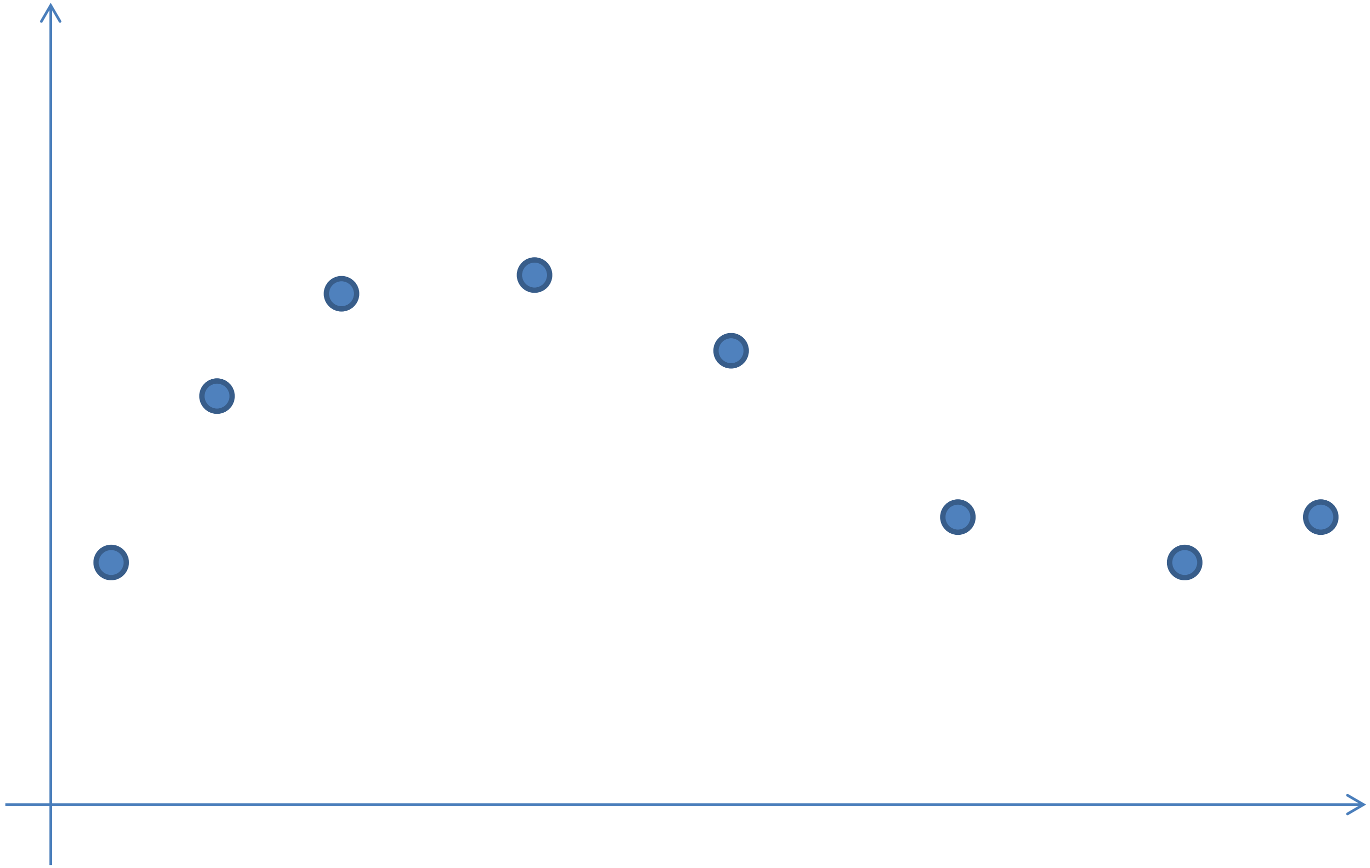
Παρεμβολή με γραμμικά splines

$$v_1(t) = v(15) + \frac{v(20) - v(15)}{20 - 15}(t - 15)$$

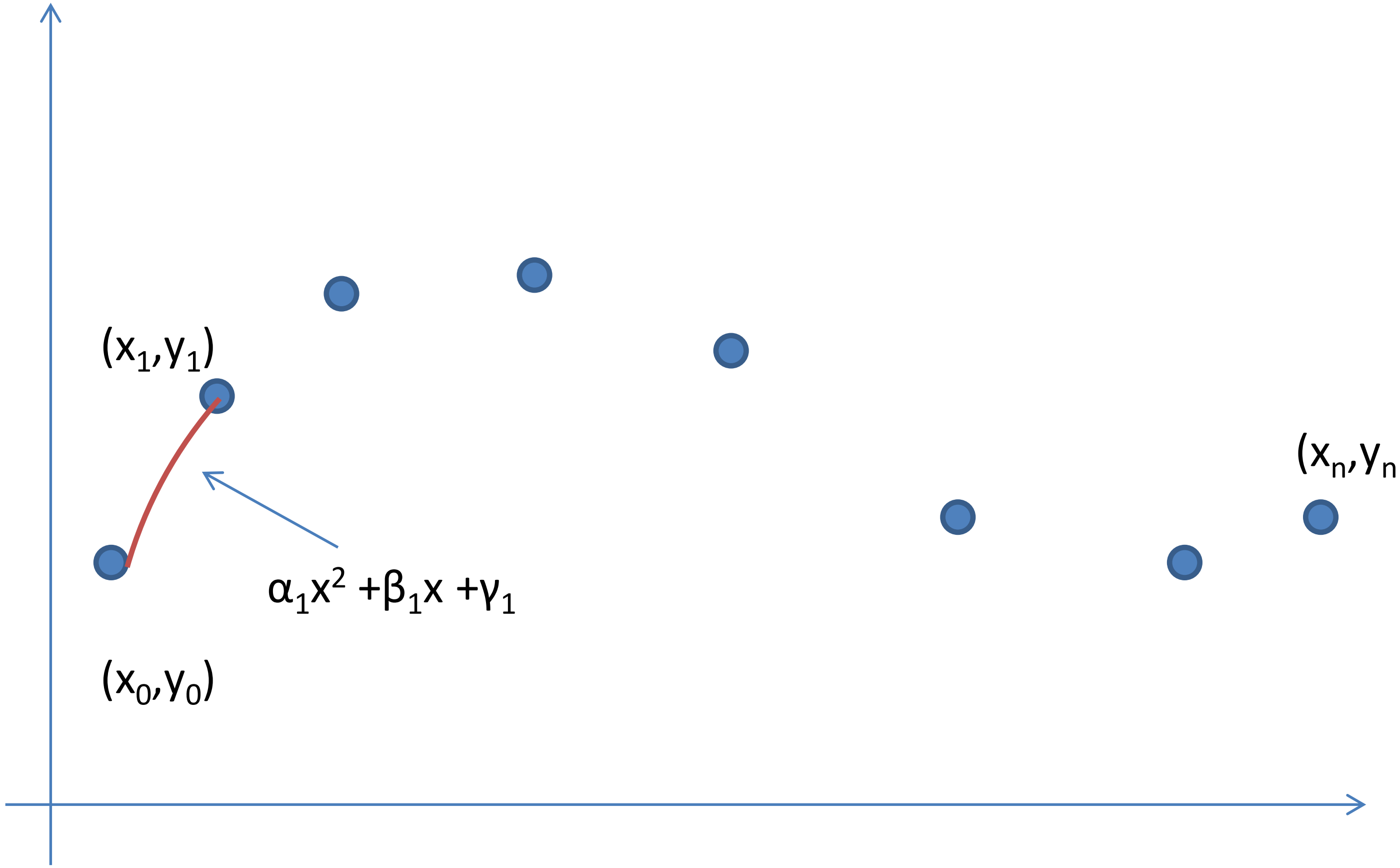
$$v_1(t) = 362{,}78 + \frac{517{,}35 - 362{,}78}{5}(t - 15) = 362{,}78 + 30{,}913(t - 15)$$

$$v_1(16) = 393{,}7 \quad m/s$$

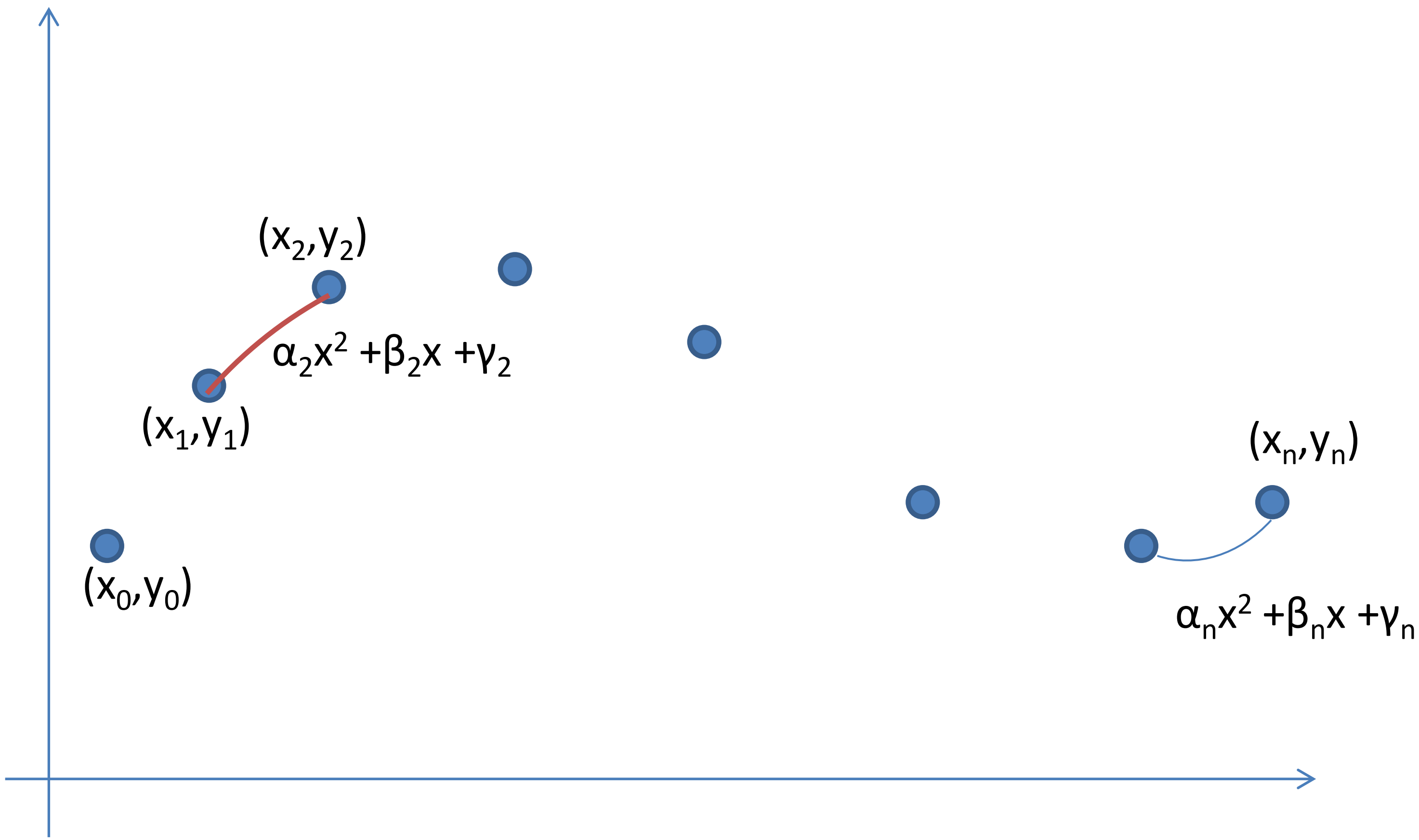
Παρεμβολή με τετραγωνικά splines



Παρεμβολή με τετραγωνιικά splines



Παρεμβολή με τετραγωνικά splines



Παρεμβολή με τετραγωνιικά splines

$y_0 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_0 + \gamma_1$

$y_1 = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_1 + \gamma_1$

$y_1 = \alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2$

$y_2 = \alpha_2 x_2^2 + \beta_2 x_2 + \gamma_2$

. = ...

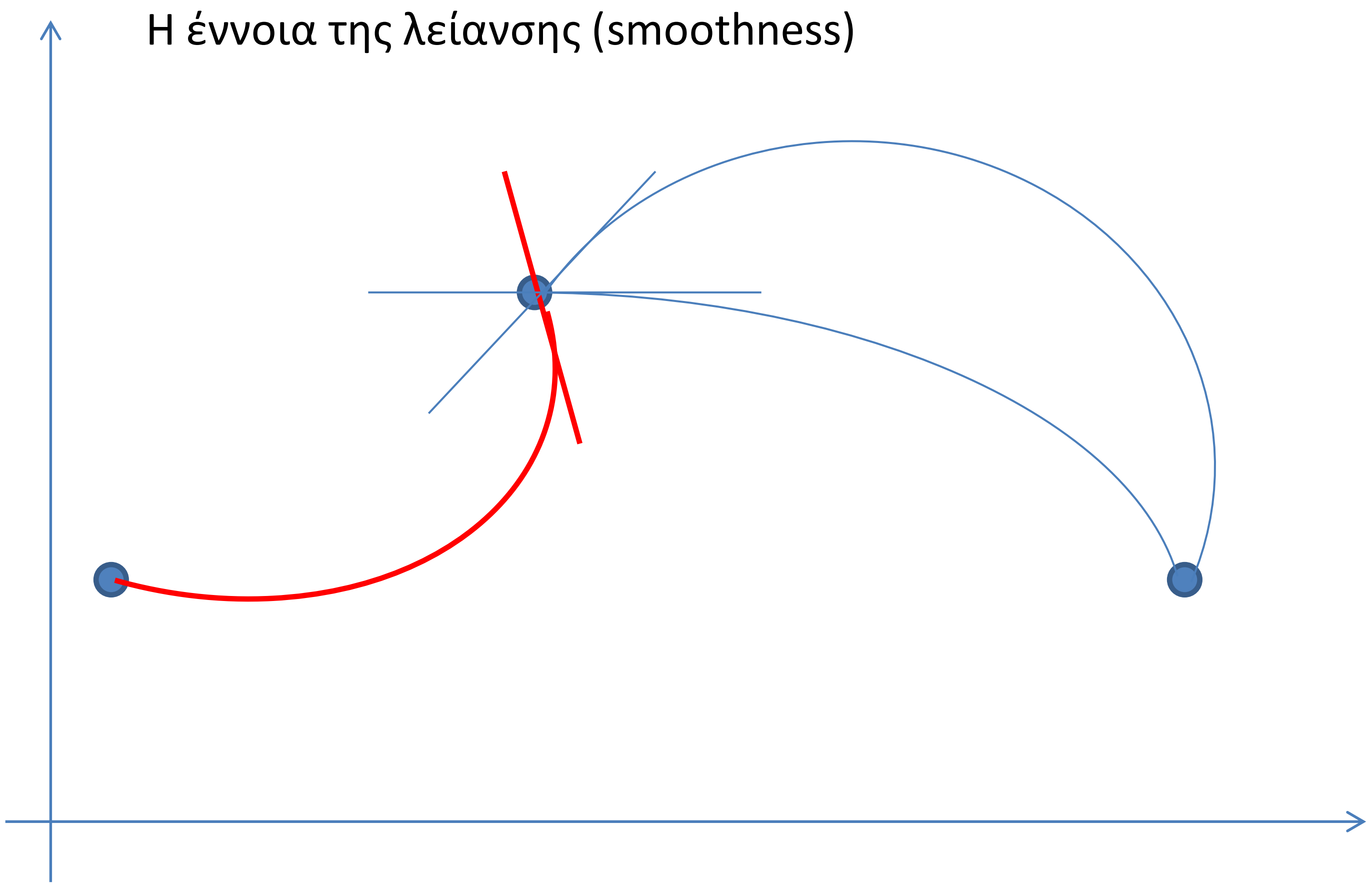
. = ...

. = ...

$y_n = \alpha_n x_n^2 + \beta_n x_n + \gamma_n$

Σύνολο 2n εξισώσεις με 3n αγνώστους

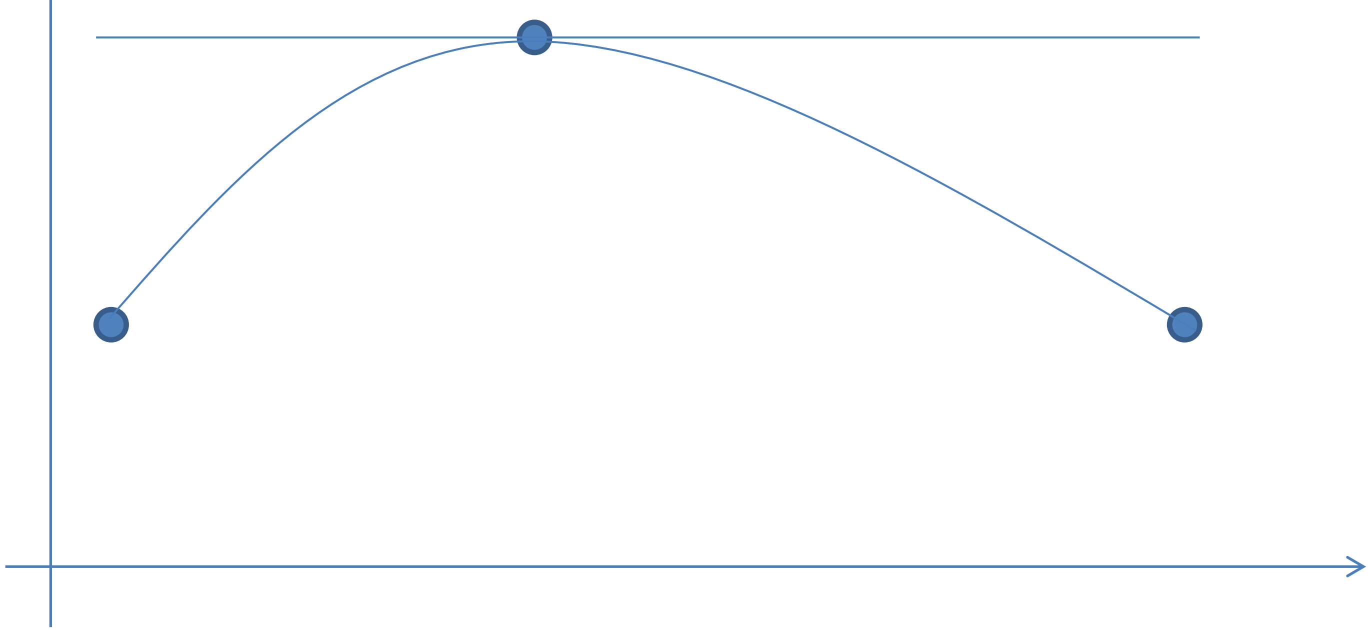
Παρεμβολή με τετραγωνικά splines



Παρεμβολή με τετραγωνικά splines

Η έννοια της λείανσης (smoothness)

$$\frac{d}{dx}(a_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\Big|_{x=x_1} = \frac{d}{dx}(a_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)\Big|_{x=x_1}$$



$$2a_1 x + \beta_1\Big|_{x=x_1} = 2a_2 x + \beta_2\Big|_{x=x_1}$$

Παρεμβολή με τετραγωνικά splines

$y_0 = \alpha_1 x_0^2 + \beta_1 x_0 + \gamma_1$

$y_1 = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_1 + \gamma_1$

$y_1 = \alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2$

$y_2 = \alpha_2 x_2^2 + \beta_2 x_2 + \gamma_2$

. = ...

. = ...

. = ...

$y_n = \alpha_n x_n^2 + \beta_n x_n + \gamma_n$

Σύνολο 2n εξισώσεις με 3n αγνώστους

$$2a_1 x_1 + \beta_1 \Big| = 2a_2 x_1 + \beta_2 \Big|$$

$$2a_2 x_2 + \beta_2 \Big| = 2a_3 x_2 + \beta_3 \Big|$$

. = ...

. = ...

. = ...

$$2a_{n-2} x_{n-1} + \beta_{n-2} \Big| = 2a_{n-1} x_{n-1} + \beta_{n-1} \Big|$$

Σύνολο n-1 εξισώσεις με 3n αγνώστους

Τετραγωνική Παρεμβολή

- Παράδειγμα:
- Λαμβάνουμε τρία σημεία από τα διαθέσιμα.
- Από αυτά περνά μοναδική καμπύλη δευτέρου βαθμού

t (sec)	V (m/s)
0	0
10	227,04
15	362,78
16	?
20	517,35
22,5	602,97