# ΚΕΦ. 5: ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

## * Διπλά Ολοκληρώματα

Έστω $R$ μία περιοχή του $\mathbb{R}^2$ και έστω $f: R \to \mathbb{R}$. Τότε το <u>διπλό ολοκλήρωμα</u> της συνάρτησης $f$ συμβολίζεται με

$$\iint_R f \quad \text{ή} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy.$$

Αν το $\iint_R f \in \mathbb{R}$ υπάρχει, τότε θα λέμε ότι η $f$ είναι <u>ολοκληρώσιμη</u>.

## * Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος

(i) $\iint_R (f+g) = \iint_R f + \iint_R g$

(ii) $\iint_R cf = c\iint_R f, \quad c \in \mathbb{R}$

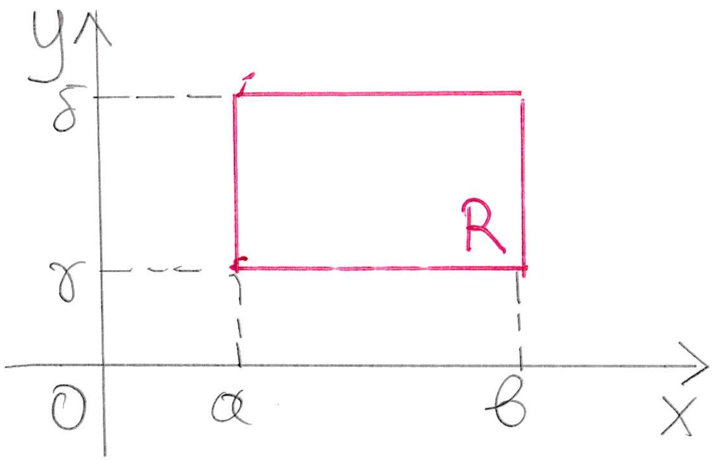
(iii) Αν $f(x,y) \leq g(x,y)$, τότε

$$\iint_R f \leq \iint_R g$$

(iv) Αν $R = R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, τότε

$$\iint_R f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f.$$

## * Διπλά ολοκληρώματα σε ορθογώνιες περιοχές




$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_\gamma^\delta \left\{ \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right\} dy =$$

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right\} dx$$

**Παράδ.** Έστω $f: R \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y$ όπου $R$ ορθογώνια περιοχή $1 \le x < 2$, $3 \le y \le 4$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_3^4 \left\{ \int_1^2 x^2 y\,dx \right\} dy = \int_3^4 y \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{2} dy =$$

$$= \int_3^4 y\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) dy = \int_3^4 \frac{7}{3} y\,dy = \frac{7}{3}\int_3^4 y\,dy =$$

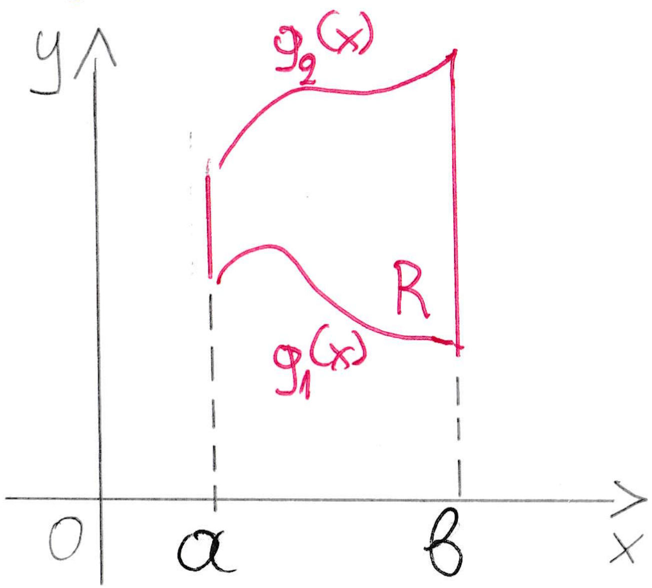
$$= \frac{7}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=3}^{4} = \frac{7}{3}\left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{49}{6}, \quad \text{ή}$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left\{ \int_3^4 x^2 y\,dy \right\} dx = \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=3}^{4} dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right) dx = \int_1^2 x^2 \frac{7}{2}\,dx = \frac{7}{2}\int_1^2 x^2\,dx =$$

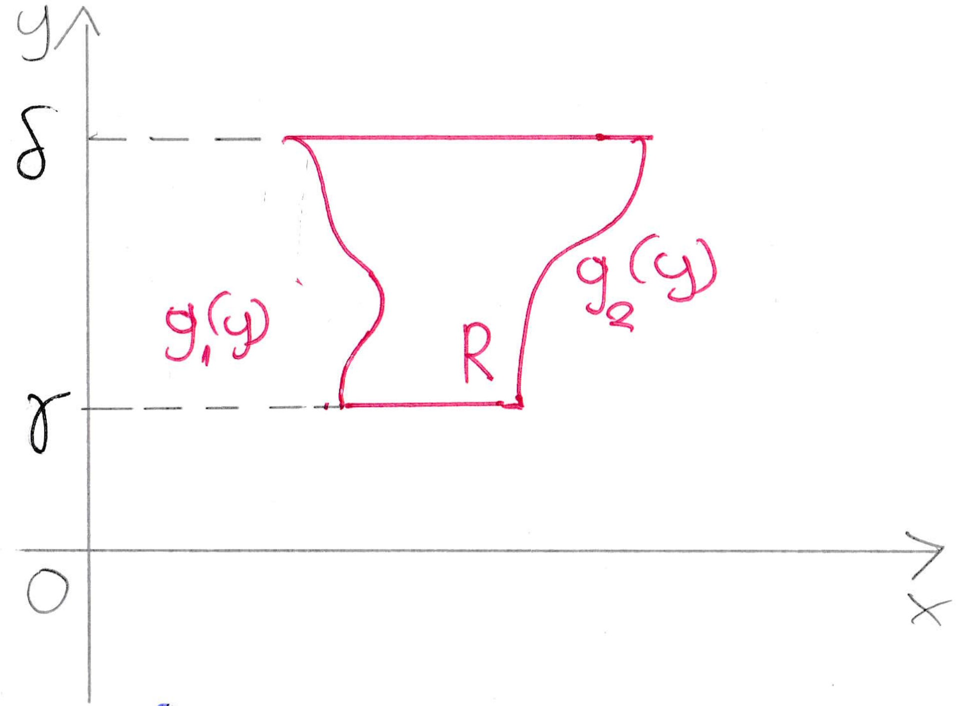
$$= \frac{7}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{2} = \frac{7}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{49}{6}. \quad \square$$

# * Διπλά ολοκληρώματα σε γενικές περιοχές




$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_\alpha^\beta \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

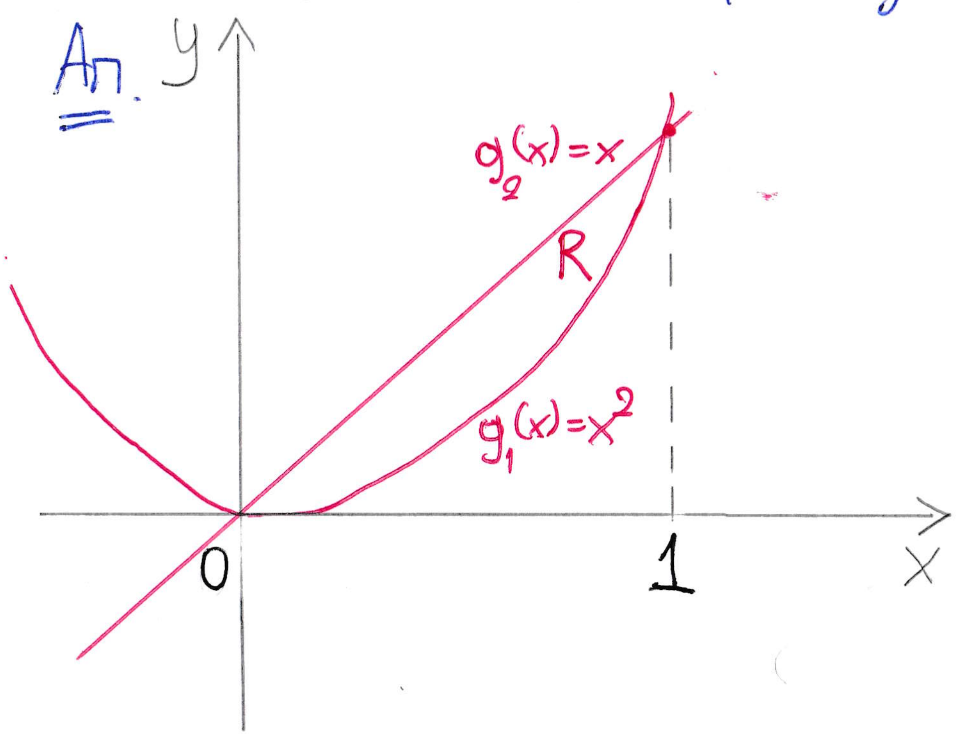



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\int_\gamma^\delta \left\{ \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy$$

<u>Παραδ.</u> Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2+y^2$. Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της $f$ στην περιοχή $R$ που σχηματίζεται από την ευθεία $y=x$ και την καμπύλη $y=x^2$.

<u>Απ.</u>




<u>Απ.</u> $$\iint_R f = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} x^2\,dy + \int_{x^2}^{x} y^2\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x^2 [y]_{y=x^2}^{x} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{x} \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x^2(x-x^2) + \frac{1}{3}(x^3-x^6) \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ x^3 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^6 \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{3}x^6 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right\} dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{1}$$

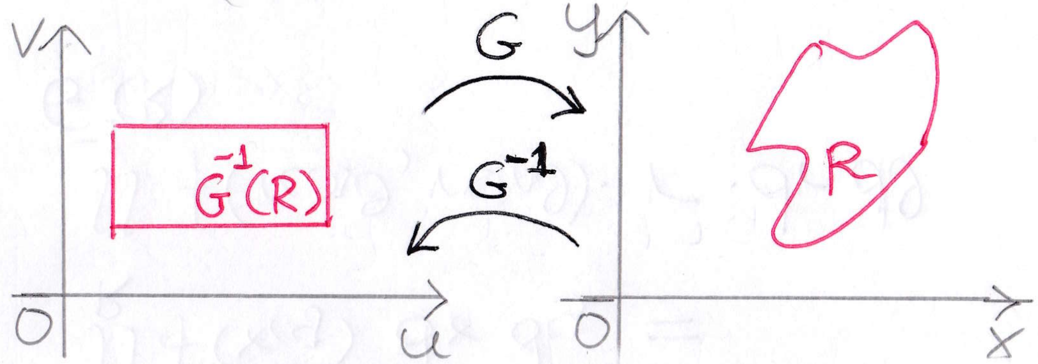
$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3}\frac{1}{4} = -\frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{-15-63+105}{315} = \frac{27}{315} = \frac{3}{35}. \quad \square$$

* Μέθοδος αλλαγής μεταβλητών

Σε ορισμένες περιπτώσεις εισάγουμε τις μεταβλητές $(u,v)$ οι οποίες μετασχηματίζουν την περιοχή $R$ του επιπέδου $Oxy$ σε μια περιοχή του επιπέδου $Ouv$ όπου είναι εύκολο να εφαρμοστούν οι προηγούμενες μέθοδοι.

Αν υπάρχει μια αντιστρέψιμη




συνάρτηση $G$ τ.ω.

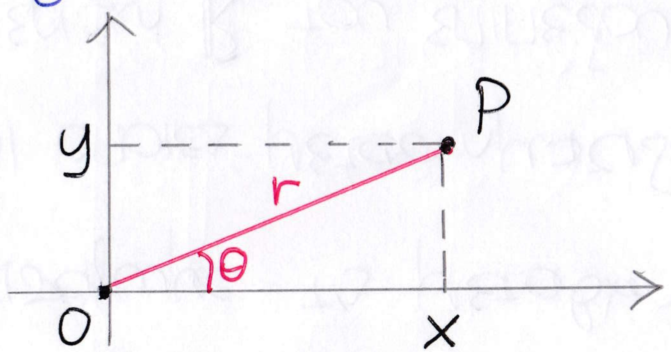
$$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G(u,v) = (\underbrace{g_1(u,v)}_{x}, \underbrace{g_2(u,v)}_{y})$$

και με Ιακωβιανή ορίζουσα $\Delta_G(u,v)$, τότε ισχύει ο τύπος της αλλαγής των μεταβλητών:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^{-1}(R)} f(G(u,v)) \cdot |\Delta_G(u,v)|\,du \cdot dv$$

* Όταν χρησιμοποιούνται οι πολικές συντεταγμένες $(r,\theta)$, οι οποίες συνδέονται με τις καρτεσιανές $(x,y)$ ως εξής:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$




Τότε είναι

$$G(r,\theta) = (\underbrace{\overbrace{r\cos\theta}^{g_1(r,\theta)}}_{x}, \underbrace{\overbrace{r\sin\theta}^{g_2(r,\theta)}}_{y})$$

Οπότε

$$\Delta_G(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

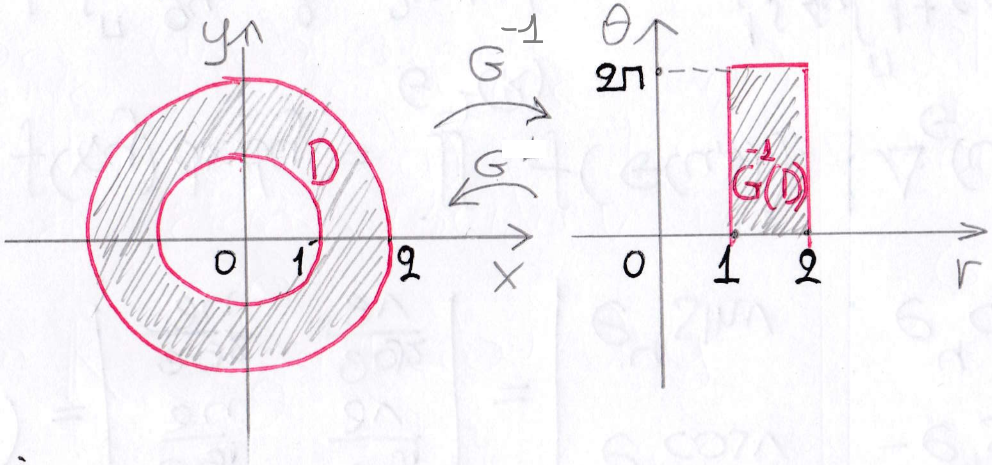
Συνεπώς ο τύπος αλλαγής μεταβλητών γράφεται πλέον ως εξής:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\iint_{G^{-1}(R)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r \cdot dr\,d\theta$$

**Παράδ.** Να υπολογιστεί το $\iint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, όπου $D$ είναι ο δακτύλιος μεταξύ των κύκλων $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=4$.

**Απ.**




Θέτουμε

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$$

Συνεπώς

$$\iint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left\{\int_1^2 (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2\cdot |\Delta_G(r,\theta)|\cdot dr\right\} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_1^2 (r^2)^2\cdot r\,dr\right\}d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\int_1^2 r^5\,dr\right\}d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_1^2 r^5\,dr\right) =$$

$$= [\theta]_{\theta=0}^{2\pi}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_{r=1}^{2} = 2\pi\left[\frac{64}{6}-\frac{1}{6}\right] = 2\pi\cdot\frac{63}{6} = 21\pi. \qquad \square$$

Άσκ. Αν $G(u,v)=(e^u\cos v, e^u\sin v)$, τότε να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)=x^2$ στην περιοχή $R$ του επιπέδου $O$-$xy$ όπου $G^{-1}(R)$ είναι το ορθογώνιο του επιπέδου $O$-$uv$ που ορίζεται από τις ανισότητες $0\leq u\leq 1$ και $0\leq v\leq \pi$.

Απ. Η Ιακωβιανή ορίζουσα θα είναι τώρα

$$\Delta_G(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^u\cos v & -e^u\sin v\\ e^u\sin v & e^u\cos v\end{vmatrix}=e^{2u}.$$

Άρα

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{G^{-1}(R)} f(G(u,v))\cdot|\Delta_G(u,v)|\cdot du\,dv=\int_0^1\int_0^\pi (e^u\cos v)^2\cdot e^{2u}\cdot du\,dv$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^\pi e^{2u}\cdot\cos^2 v\cdot e^{2u}dv\right\}du=\int_0^1\left\{e^{4u}\int_0^\pi\frac{1+\cos 2v}{2}dv\right\}du=\int_0^1 e^{4u}\frac{1}{2}\left[v+\frac{1}{2}\sin 2v\right]_{v=0}^{\pi}du$$

$$=\int_0^1 e^{4u}\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi-0\right)du=\frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{4u}du=\frac{\pi}{2}\frac{1}{4}\left[e^{4u}\right]_{u=0}^{1}=\frac{\pi}{8}(e^4-1). \quad \square$$

5.9

Ασκ. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$f(x,y) = ye^x$.

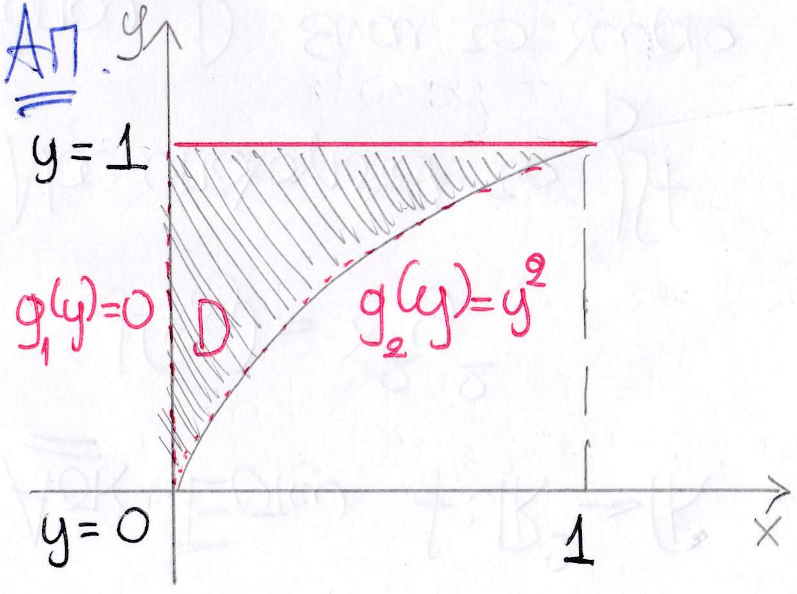
Να υπολογιστεί το $\iint_D f$

όπου D είναι ο τόπος

που σχηματίζεται από τις

$y=0,\ y=1,\ x=0,\ x=y^2$.

Απ.




$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{y^2} ye^x\,dx \right\} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[ ye^x \right]_{x=0}^{y^2} dy = \int_0^1 (ye^{y^2} - y)\,dy$$

$$= \int_0^1 ye^{y^2} dy - \int_0^1 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}(y^2)'\,dy - \int_0^1 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[ e^{y^2} \right]_{y=0}^1 - \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1.$$

$\square$

**Ασκ** Εστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$f(x,y)=x^2y^2$.

Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D f$

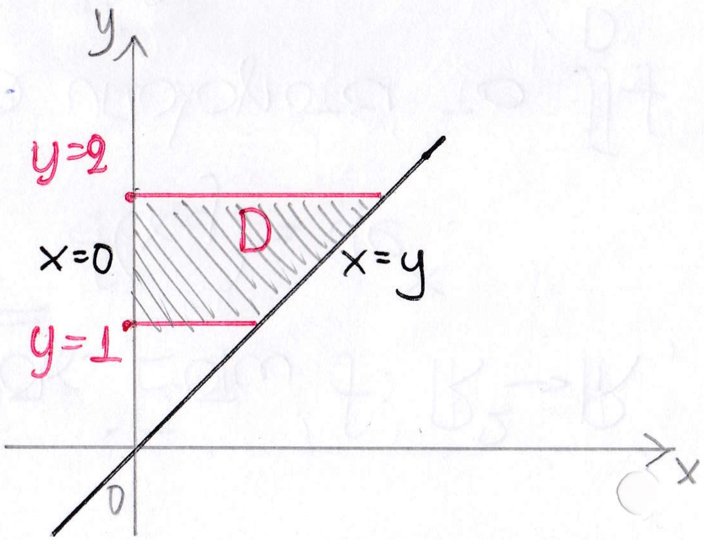
όπου D είναι το χωρίο

που περικλείεται από

τις ευθείες $y=1$, $y=2$,

$x=0$ και $x=y$.

**Απ.**




$$\iint\limits_D f = \int_1^2 \left\{ \int_0^y x^2y^2\,dx \right\} dy =$$

$$= \int_1^2 y^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{y} dy =$$

$$= \int_1^2 y^2 \left[\frac{y^3}{3} - 0\right] dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{y^6}{6}\right]_{y=1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2^6}{6} - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{63}{6} =$$

$$= \frac{63}{18} =$$

$$= \frac{7}{2}.$$

$\square$

* Το εμβαδόν ενός χωρίου D του $\mathbb{R}^2$,

μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια

του διπλού ολοκληρώματος, και συγκεκριμένα με

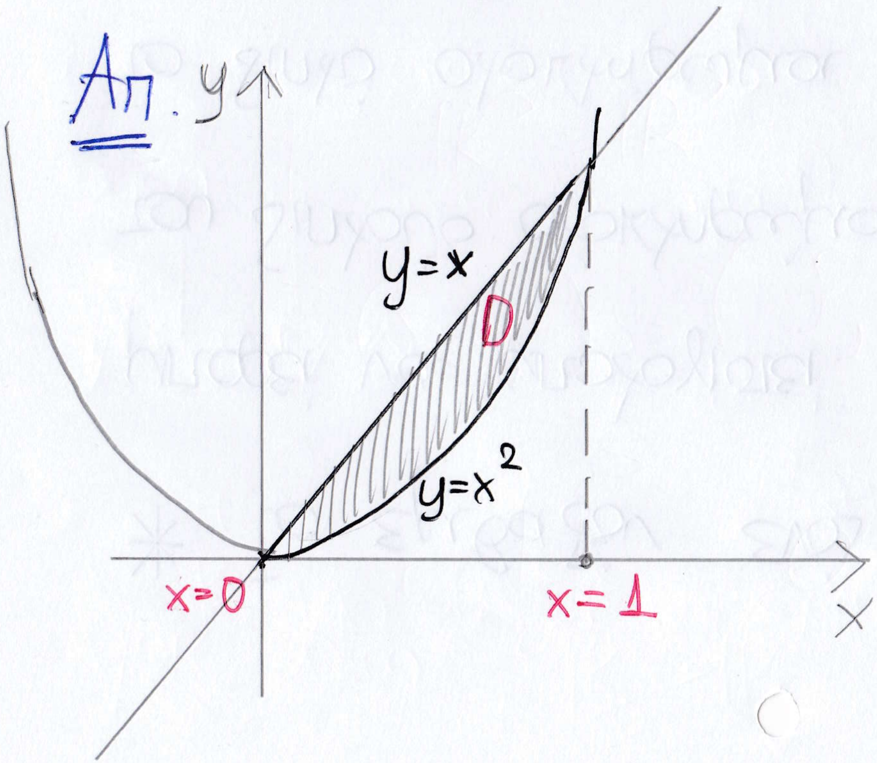
το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$f(x,y) = 1$ , δηλ.

$$\text{Εμβ.}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy .$$

<u>Παραδ.</u> Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου D, που περιέχεται μεταξύ της ευθείας $y=x$ και της παραβολής $y=x^2$.

<u>Απ.</u>




$$\text{Εμβ.}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{x} 1\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ y \right]_{y=x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx =$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{6}.$$

$\square$

* Τύπος του Green

Έστω $F: D \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\int_C F = \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Παραδ. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \underbrace{(2x-y+4)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(3x+5y-6)}_{Q(x,y)}dy,$$

όπου $C$ είναι ο κύκλος $x^2+y^2=4$.

Απ: Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$P(x,y) = 2x - y + 4 \quad \text{και} \quad Q(x,y) = 3x + 5y - 6.$$

Τότε

$$I = \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

όπου D ο τόπος με σύνορο c, δηλ. D είναι ο κυκλικός δίσκος με σύνορο τον κύκλο $c: x^2+y^2=4$. Οπότε

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D \big(3-(-1)\big)\,dx\,dy = 4\iint_D dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 r\,dr \right\} d\theta = 4\left( \int_0^{2\pi} d\theta \right)\left( \int_0^2 r\,dr \right) = 4\left[\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} \cdot \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{2} = 16\pi.$$

$\square$

* Μάζα και κέντρο μάζας

Ορ. Θεωρούμε ένα χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ στο οποίο έχει κατανεμηθεί μάζα με αμελητέο πάχος. Έστω ότι η πυκνότητα της μάζας περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας μάζας $\sigma(x,y)$. Τότε η συνολική μάζα m στο χωρίο D δίνεται απ' τον τύπο

$$m = \iint_D \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

και το κέντρο μάζας $(x_k, y_k)$ έχει συντεταγμένες που δίνονται απ' τις σχέσεις

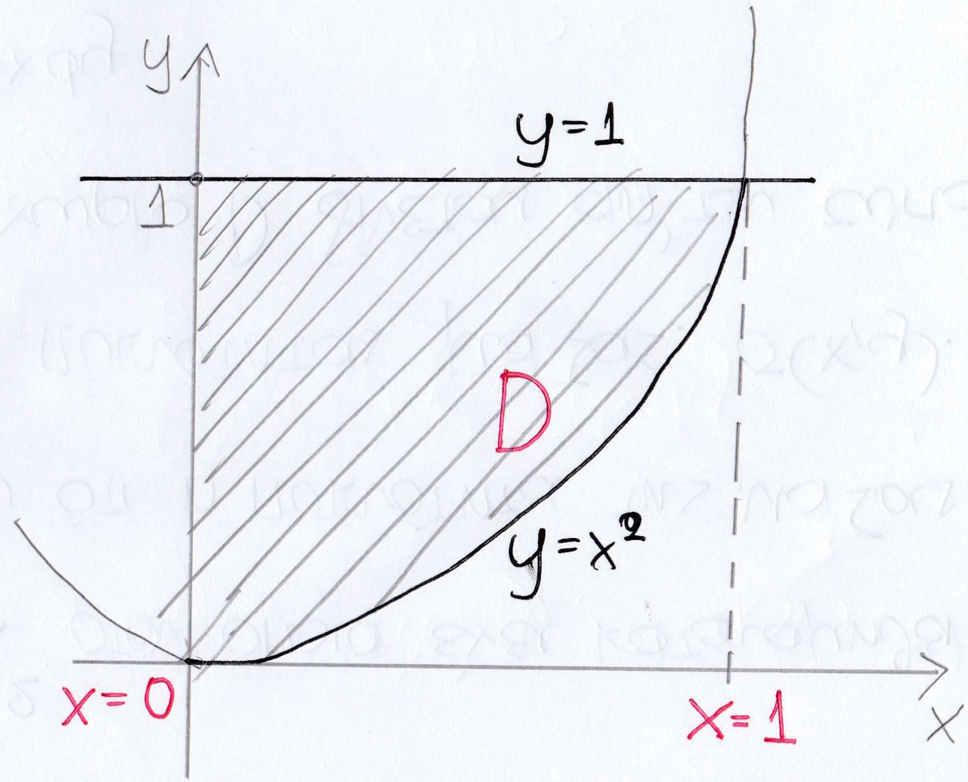
$$x_k = \frac{1}{m}\iint_D x\cdot\sigma(x,y)\,dx\,dy \quad \text{και} \quad y_k = \frac{1}{m}\iint_D y\,\sigma(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Παραδ.</u> Θεωρούμε το αμελητέου πάχους χωρίο $D$ του $\mathbb{R}^2$, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$, την ευθεία $y=1$ και τον άξονα $x=0$. Αν στο χωρίο $D$ έχει κατανεμηθεί μάζα πυκνότητας $\sigma(x,y)=60x$, να υπολογιστούν:

α) η μάζα του $D$, και

β) το κέντρο μάζας του $D$.

<u>Απ.</u> Έχουμε το σχήμα



α) Είναι $m=\iint_D \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=x^2}^{1} 60x\,dy\right\}dx = 60\int_{x=0}^{1} x[y]_{y=x^2}^{1}dx$

$=60\int_0^1 x(1-x^2)dx = 60\int_0^1 (x-x^3)dx = 60\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1} = 60\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] = 60\cdot\frac{1}{4} = 15.$

Άρα η ζητούμενη μάζα είναι ίση με 15.

β) $x_K = \frac{1}{m}\iint_D x\cdot\sigma(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=x^2}^{1} x\cdot 60x\,dy\right\}dx = 4\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=x^2}^{1} x^2 dy\right\}dx =$

$=4\int_0^1 x^2[y]_{y=x^2}^{1}dx = 4\int_0^1 x^2(1-x^2)dx = 4\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = 4\cdot\frac{2}{15} = \frac{8}{15}$

$y_K = \frac{1}{m}\iint_D y\cdot\sigma(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=x^2}^{1} y\cdot 60x\,dy\right\}dx = 4\int_{x=0}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{1}dx =$

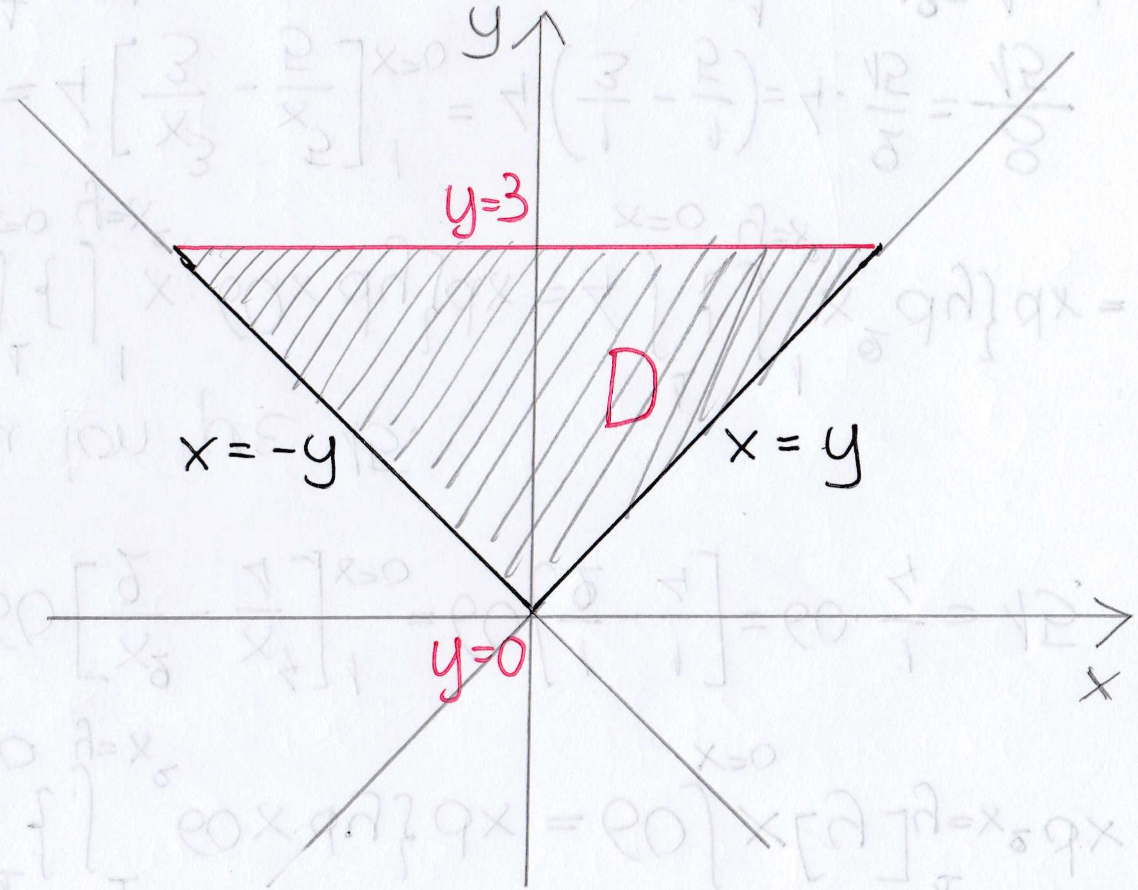
$=4\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx = 2\int_0^1 (x-x^5)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{1} = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = 2\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$

Άρα το κέντρο μάζας θα είναι το σημείο $(x_m, y_m) = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{3}\right)$. $\square$

<u>Άσκ.</u> Θεωρούμε το αμελητέου πάχους χωρίο $D$ του $\mathbb{R}^2$, το οποίο περικλείεται από τις ευθείες $y=-x$, $y=x$ και $y=3$. Αν στο χωρίο $D$ έχει κατανεμηθεί μάζα πυκνότητας $\sigma(x,y)=x+y^2$, να υπολογιστούν

α) η μάζα του $D$, και

β) το κέντρο μάζας του $D$.




<u>Απ.</u> Έχουμε το σχήμα

α) Είναι $m=\iint_D \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{3}\left\{\int_{x=-y}^{y}(x+y^2)\,dx\right\}dy = \int_{y=0}^{3}\left[\frac{x^2}{2}+y^2x\right]_{x=-y}^{y}dy =$

$$= \int_0^3 \left(\cancel{\frac{y^2}{2}}+y^3-\cancel{\frac{y^2}{2}}+y^3\right)dy = 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{3} = 2\,\frac{81}{4} = \frac{81}{2}.$$

Άρα η ζητούμενη μάζα είναι ίση με $\frac{81}{2}$.

β) $x_k = \frac{1}{m}\int_{y=0}^{3}\left\{\int_{x=-y}^{y} x(x+y^2)\,dx\right\}dy = \frac{2}{81}\int_{y=0}^{3}\left\{\int_{x=-y}^{y}(x^2+xy^2)\,dx\right\}dy = \frac{2}{81}\int_{y=0}^{3}\left[\frac{x^3}{3}+y^2\frac{x^2}{2}\right]_{x=-y}^{y}dy =$

$$= \frac{2}{81}\int_0^3\left(\frac{y^3}{3}+\cancel{y^2\frac{y^2}{2}}+\frac{y^3}{3}-\cancel{y^2\frac{y^2}{2}}\right)dy = \frac{2}{81}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{3} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{81}\cdot 3}\cdot\frac{\cancel{81}}{\cancel{4}} = \frac{1}{3}.$$

$y_k = \frac{1}{m}\int_{y=0}^{3}\left\{\int_{x=-y}^{y} y(x+y^2)\,dx\right\}dy = \frac{2}{81}\int_{y=0}^{3}\left\{\int_{x=-y}^{y}(xy+y^3)\,dx\right\}dy = \frac{2}{81}\int_{y=0}^{3}\left[y\frac{x^2}{2}+xy^3\right]_{x=-y}^{y}dy =$

$$= \frac{2}{81}\int_0^3\left(\cancel{\frac{y^3}{2}}+y^4-\cancel{\frac{y^3}{2}}+y^4\right)dy = \frac{2}{81}\cdot 2\left[\frac{y^5}{5}\right]_{y=0}^{3} = \frac{2}{81}\cdot\frac{486}{5} = \frac{12}{5}.$$

Άρα το κέντρο μάζας θα είναι το σημείο $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{3}, \frac{12}{5}\right)$. □

* Εμβαδόν επιφανειας

Προτ. Εστω $S$ μια επιφάνεια με εξίσωση

$z = f(x,y)$ όπου $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Αν $f$ είναι διαφορίσιμη, τότε το εμβαδόν επιφανειας $S$ θα δίνεται από τον τύπο

$$E(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

<u>Παραδ.</u> Να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$ όπου $0\leq z\leq 1$.

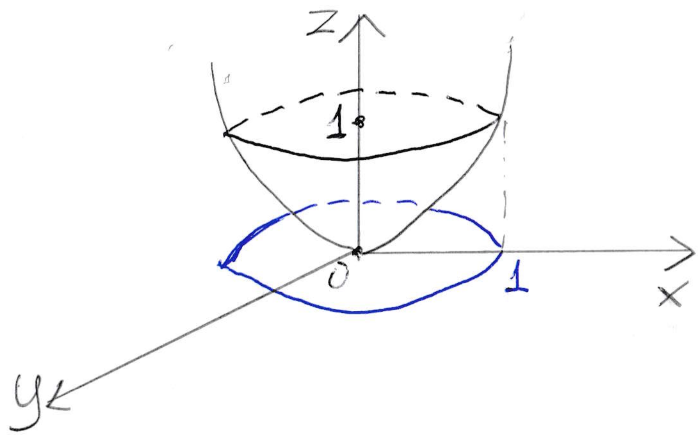
<u>Απ.</u> Είναι $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}=\{(r,\theta):0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. Άρα

$$E(S)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\right\}d\theta=\frac{1}{8}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}(1+4r^2)'dr\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{1}d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\left(5^{3/2}-1\right)d\theta=\frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)\left[\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(5^{3/2}-1\right)2\pi=\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right).$$




$\square$

<u>Άσκ.</u> Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφανείας του παραβολοειδούς $z = 2-(x^2+y^2)$, όπου $z \geq 0$.

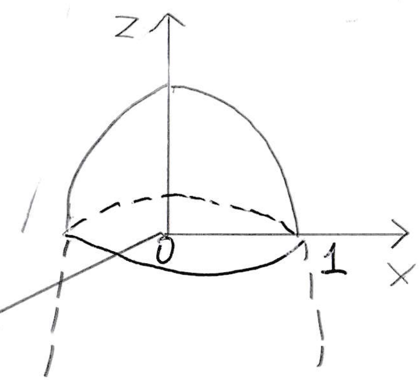
<u>Απ.</u> Έχουμε $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2\} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

Άρα $E(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} \cdot r \cdot dr \right\} d\theta =$

$$= \frac{1}{8} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{\sqrt{2}} (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} (1+4r^2)'\, dr \right\} d\theta = \frac{1}{8} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{\sqrt{2}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left(9^{3/2} - 1\right) d\theta = \frac{1}{12}\left(9^{3/2}-1\right) \left[\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{1}{12}\left(9^{3/2}-1\right) \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{\pi}{6}(27-1) = \frac{26\pi}{6} = \frac{13\pi}{3}.$$




$\square$

Άσκ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν επιφάνειας της σφαίρας

$x^2+y^2+z^2=a^2$.

Απ. Το άνω ημισφαίριο έχει εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

δηλ. $z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ όπου

$f: D \to \mathbb{R}$ και

$$D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2\}$$

$$=\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a \,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Άρα

$$E(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{\frac{a^2\cancel{-x^2}\cancel{-y^2}\cancel{+x^2}\cancel{+y^2}}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = a\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,dr\right\}d\theta =$$

$$= -\frac{a}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{a}(a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2-r^2)'\,dr\right\}d\theta = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{r=0}^{a}d\theta =$$

$$= -a\int_0^{2\pi}(0-a)\,d\theta = a^2\left[\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 2\pi a^2.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν, συνολικά, θα είναι ίσο με $4\pi a^2$.

$\square$

## * ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Έστω $D$ μια περιοχή του $\mathbb{R}^3$ και $f: D \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση. Τότε το <u>τριπλό ολοκλήρωμα</u> της $f$ στην περιοχή $D$ δίνεται από τη σχέση

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_{x=a}^{\beta}\left\{\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left\{\int_{z=h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\}dy\right\}dx$$

<u>Παραδ.</u> Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = \sin x,$$

στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $D$ που ορίζεται από τις ανισότητες

$$0 \leq x \leq \pi,$$
$$2 \leq y \leq 3,$$
$$-1 \leq z \leq 1.$$

Απ. Είναι

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{\pi}\left\{\int_{y=2}^{3}\left\{\int_{z=-1}^{1}\sin x\,dz\right\}dy\right\}dx =$$

$$= \int_{x=0}^{\pi}\left\{\int_{y=2}^{3}\sin x\,[z]_{z=-1}^{1}\,dy\right\}dx =$$

$$= \int_{x=0}^{\pi}\left\{2\sin x\int_{y=2}^{3}dy\right\}dx =$$

$$= \int_{x=0}^{\pi} 2\sin x\,dx =$$

$$= 2\left[-\cos x\right]_{x=0}^{\pi} =$$

$$= 2\left[-\cos\pi + \cos 0\right] =$$

$$= 2\left[-(-1) + 1\right] =$$

$$= 4. \qquad \square$$

<u>Ασκ.</u> Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

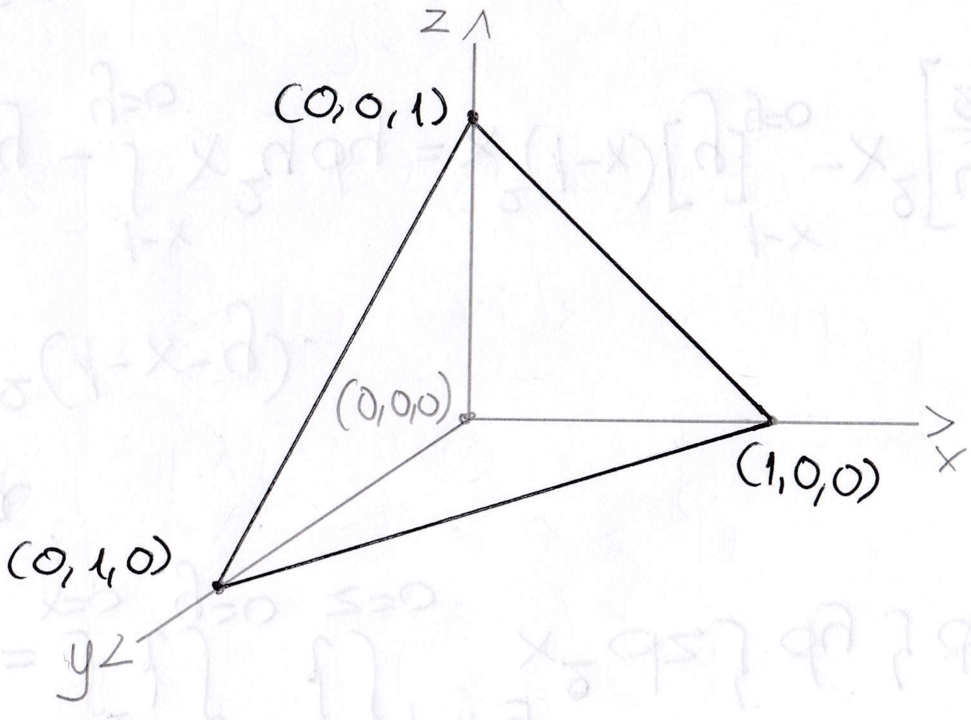
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ f(x,y,z) = x^2,$

στο τετράεδρο $D$ με κορυφές τα σημεία

$(0,0,0),$
$(1,0,0),$
$(0,1,0),$
$(0,0,1).$

δηλ. στο τετράεδρο που ορίζεται από τις ανισότητες

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1-x$$
$$0 \leq z \leq 1-x-y.$$



Απ. Είναι $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1-x}\left\{\int_{z=0}^{1-x-y} x^2\,dz\right\}dy\right\}dx.$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

- $\int_{z=0}^{1-x-y} x^2\,dz = x^2\left[z\right]_{z=0}^{1-x-y} = x^2(1-x-y).$

- $\int_{y=0}^{1-x} x^2(1-x-y)\,dy = \int_{y=0}^{1-x} x^2(1-x)\,dy - \int_{y=0}^{1-x} x^2 y\,dy = x^2(1-x)\left[y\right]_{y=0}^{1-x} - x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x} =$

$$= x^2(1-x)^2 - x^2\,\frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1}{2}x^2(1-x)^2.$$

- $\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} x^2(1-2x+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}(x^2-2x^3+x^4)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}.$$

Άρα $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{60}.$ $\square$

# * Κίνηση ρευστών

<u>Ορ.</u> Έστω $S$ μία κλειστή επιφάνεια και $D$ η κλειστή στερεά περιοχή που περικλείεται από την επιφάνεια $S$.
Έστω $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ ένα διανυσματικό πεδίο που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στην περιοχή $D$.
Τότε το

$$I=\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\, dx\,dy\,dz$$

είναι η <u>ροή του διανυσματικού πεδίου δια μέσου της επιφάνειας $S$</u>.

Αν $I>0$, τότε το ρευστό τείνει να εγκαταλείψει την $D$ και αν $I<0$, τότε το ρευστό τείνει να εισέλθει στην $D$.
Αν $\vec{u}=\vec{u}(x,y,z)$ η ταχύτητα του υγρού στην $D$, τότε το

$$V=\iiint_D \mathrm{div}\,\vec{u}\, dx\,dy\,dz$$

εκφράζει τον <u>όγκο του υγρού που διαπερνά την $S$ στη μονάδα του χρόνου</u>.

<u>Παραδ</u> Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$F : D \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (xy,\ yz,\ zx)$$

όπου $D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$

και $S$ είναι η (εξωτερική) επιφάνεια.

Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $F$ διά μέσου της επιφάνειας $S$.

<u>Απ.</u> Είναι $I = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1} \left\{ \int_{y=0}^{1-x} \left\{ \int_{z=0}^{1-x-y} (y+z+x)\, dz \right\} dy \right\} dx$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

- $$\int_{z=0}^{1-x-y}(x+y+z)\,dz = \left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-x-y} = (x+y)(1-x-y)+\frac{(1-x-y)^2}{2} = \frac{2(x+y)(1-x-y)+(1-x-y)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-x-y)[2x+2y+1-x-y] = \frac{1}{2}[1-(x+y)][1+(x+y)] = \frac{1}{2}\left[1-(x+y)^2\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+y)^2.$$

- $$\int_{y=0}^{1-x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+y)^2\right)dy = \frac{1}{2}\left[y\right]_{y=0}^{1-x} - \frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x)-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3.$$

- $$\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^3\right)dx = \left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Άρα η ζητούμενη ροή του διανυσματικού πεδίου $F$, δια μέσου της επιφάνειας $S$ είναι ίση με $\frac{1}{8}$.

$\square$

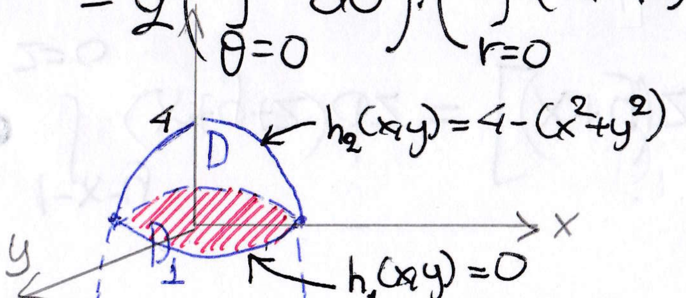
Παραδ. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $F: D \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z)=(0,y,z)$ όπου $D$ είναι το παραβολοειδές $z=4-(x^2+y^2)$, $z \geq 0$ και $S$ είναι η (εξωτερική) επιφάνειά του. Να υπολογιστεί η ροή του διανυσμ. πεδίου $F$ δια μέσου της επιφάνειας $S$.

Απ. Είναι $I = \iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dy = \iiint_D (0+1+1)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D 2\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_1} \left\{ \int_{z=0}^{4-x^2-y^2} 2\,dz \right\} dx\,dy$

όπου $D_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\} = \{(\varphi,\theta) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Οπότε

$$I = 2 \iint_{D_1} [z]_{z=0}^{4-x^2-y^2} dx\,dy = 2 \iint_{D_1} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy = 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{2} (4-r^2) r\,dr \right\} d\theta =$$

$$= 2\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right) \cdot \left(\int_{r=0}^{2} (4r-r^3)\,dr\right) = 2 \cdot [\theta]_{\theta=0}^{2\pi} \cdot \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2} = 2 \cdot 2\pi \left(4 \cdot \frac{4}{2} - \frac{16}{4}\right) = 16\pi.$$




$\square$

<u>Παραδ.</u> Να υπολογιστεί ο όγκος του υγρού που διαπερνά την επιφάνεια $S: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$, στη μονάδα του χρόνου, αν η ταχύτητα του υγρού δίνεται απ' τη σχέση $u(x,y,z)=(x,y^2,-2yz)$.

<u>Απ.</u> Έχουμε ότι $S: z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z\geq 0$. Οπότε

$$V=\iiint_D \operatorname{div} u\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_1}\left\{\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (1+\cancel{2y}-\cancel{2y})\, dz\right\} dx dy = \iint_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\, dx dy$$

όπου $D_1=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}=\{(r,\theta): 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$. Οπότε

$$V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr\right\}d\theta=\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right)\cdot\left(\int_{r=0}^{1}\sqrt{1-r^2}\cdot r\cdot dr\right)=\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)^{1/2}\frac{(1-r^2)'}{-2}dr$$

$$=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1(1-r^2)^{1/2}(1-r^2)'dr=-\pi\left[\frac{(1-r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{1}=-\pi\left(0-\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

□

# *Μάζα και κέντρο μάζας

Ορ. Θεωρούμε μία στερεά περιοχή $D \subset \mathbb{R}^3$ στην οποία έχει κατανεμηθεί μάζα με πυκνότητα που περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας μάζας $\sigma(x,y,z)$. Τότε η συνολική <u>μάζα $m$</u> στη στερεά περιοχή $D$ δίνεται απ' τον τύπο

$$m = \iiint_D \sigma(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

και το <u>κέντρο μάζας</u> <u>$(x_k, y_k, z_k)$</u> έχει συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις

$$x_k = \frac{1}{m}\iiint_D x\cdot\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad y_k = \frac{1}{m}\iiint_D y\cdot\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad z_k = \frac{1}{m}\iiint_D z\,\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Παραδ. Να υπολογιστούν (α) η μάζα και (β) το κέντρο μάζας της στερεάς περιοχής $D$ που ορίζεται από τις επιφάνειες

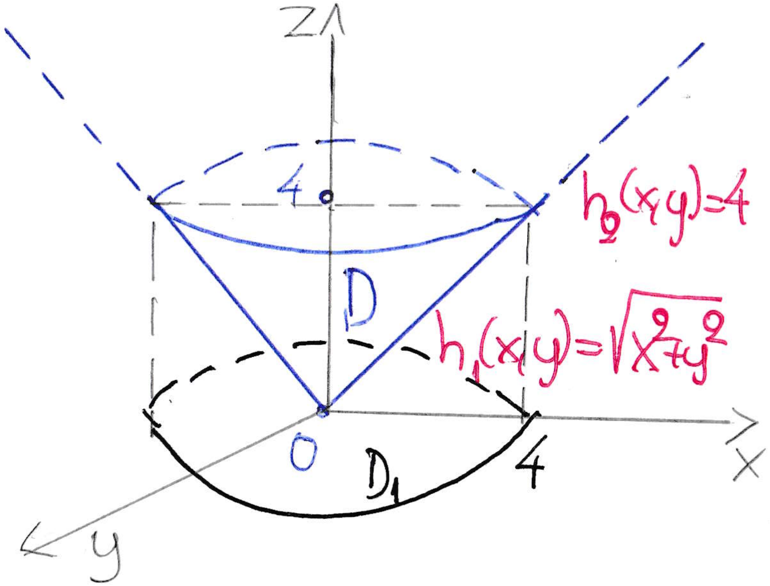
$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=4,$$

εάν η μάζα είναι κατανεμημένη σύμφωνα με τη συνάρτηση πυκνότητας μάζας $\sigma(x,y,z)=x^2$.

Απ. (α) Είναι $m=\iiint_D \sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D x^2\,dx\,dy\,dz$

$$=\iint_{D_1}\left\{\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{4} x^2\,dz\right\}dx\,dy = \iint_{D_1} x^2\left[z\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{4}dx\,dy$$

$$=\iint_{D_1} x^2\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$$




όπου $D_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4^2\}$

$= \{(r,\theta) : 0 \le r \le 4,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$

Οπότε

$$m = \iint_{D_1} x^2\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{4} r^2\cos^2\theta\,(4-r)\,r\,dr\right\}d\theta$$

$$=\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_{r=0}^{4} r^3(4-r)\,dr\right) = \left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right)\left(\int_{r=0}(4r^3-r^4)\,dr\right)$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{2\pi}\cdot\left[4\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{4} = \pi\left(4^4-\frac{1}{5}4^5\right) = \frac{256\pi}{5}.$$

(B) Είναι $x_K = \frac{1}{m}\iiint_D x\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{5}{256\pi}\iiint_D x^3\,dx\,dy\,dz$

$$= \frac{5}{256\pi}\iint_{D_1} x^3\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \frac{5}{256\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{4} r^3\cos^3\theta(4-r)\,r\,dr\right\}d\theta$$

$$= \frac{5}{256\pi}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_{r=0}^{4} r^4(4-r)\,dr\right) = \frac{5}{256\pi}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\cos\theta\,d\theta\right)\left(\left[4\frac{r^5}{5}-\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{4}\right) =$$

$$= \frac{5}{256\pi}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(1-\sin^2\theta)(\sin\theta)'\,d\theta\right)\cdot\left[4\cdot\frac{4^5}{5}-\frac{4^6}{6}\right] = \frac{5}{256\pi}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{2\pi}\cdot\left[4\cdot\frac{4^5}{5}-\frac{4^6}{6}\right] =$$

$$= \frac{5}{256}\left[0-0\right]\cdot\left[4\frac{4^5}{5}-\frac{4^6}{6}\right] = 0.$$

Επίσης $y_K = 0$.

$$z_k = \frac{1}{m}\iiint_D z\sigma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{5}{256\pi}\iiint_D z x^2\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{5}{256\pi}\iint_{D}\left\{ x^2\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} z\,dz\right\}dx\,dy = \frac{5}{256\pi}\iint_{D_1} x^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{4}dx\,dy =$$

$$= \frac{5}{256\pi}\iint_{D_1} x^2\left(\frac{4^2}{2} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}{2}\right)dx\,dy = \frac{5}{256\pi}\iint_{D_1} x^2\frac{1}{2}(16-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{5}{256\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left\{\int_{r=0}^{4} r^2\cos^2\theta\cdot\frac{r}{2}(16-r^2)\,dr\right\}d\theta = \frac{5}{256\pi}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{4} r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)dr\right)$$

$$= \frac{5}{256\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\pi}\cdot\left[8\frac{r^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{4} = \frac{5}{\cancel{256}}\,\frac{\cancel{512}^{\,2}}{3} = \frac{10}{3}.$$

Άρα το ζητούμενο κέντρο μάζας είναι το $\left(0,0,\frac{10}{3}\right)$.

$\square$