

Δ.6.2_Γραμμικές_ΔΕΜΠ

• Ομογενείς ΔΕΜΠ

Έστω η ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = 0$.

Αν η χαρακτηριστική εξίσωσή της $F(\omega, 1) = 0$, έχει ρίζες $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, τότε $F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0$.

1) Αν $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_n$, τότε η ΔΕΜΠ έχει λύση την

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

2) Αν $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k \neq \omega_{k+1} \neq \dots \neq \omega_n$, τότε η λύση είναι

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x\varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1}\varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1}x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

3) Αν $\omega_1 = a + \beta i$, $\omega_2 = a - \beta i$, τότε η αντίστοιχη λύση είναι

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i\{\varphi_2[y + (a + i\beta)x] + \varphi_2[y + (a - i\beta)x]\}.$$

Δ.6.2_Γραμμικές_ΔΕΜΠ

• Αναλύσιμες ΔΕΜΠ

Έστω η αναλύσιμη ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \cdot \dots \cdot (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n) z = 0$$

όπου όλοι οι παράγοντες είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Τότε σε κάθε παράγοντα $(a_i D_x + \beta_i D_y + \gamma_i)$ αντιστοιχεί η λύση

$$\boxed{z = e^{-\frac{\gamma_i}{a_i} x} \varphi(a_i y - \beta_i x)}, \text{ αν } a_i \neq 0 \quad \text{ή} \quad \boxed{z = e^{-\frac{\gamma_i}{\beta_i} y} \varphi(a_i y - \beta_i x)}, \text{ αν } \beta_i \neq 0.$$

και η γενική λύση θα είναι το άθροισμα όλων αυτών των παραστάσεων.

Αν υπάρχουν επαναλαμβανόμενοι παράγοντες, π.χ. ο

$(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1)^k$, τότε το αντίστοιχο μέρος της λύσης θα είναι το

$$\boxed{e^{-\frac{\gamma_1}{a_1} x} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x \varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right]}.$$

Δ.6.2_Γραμμικές_ΔΕΜΠ

- Μη αναλύσιμες ΔΕΜΠ

Έστω η μη αναλύσιμη ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = 0.$$

Τότε η λύση της δίνεται από τη σχέση

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y}.$$

όπου $F(a_i, \beta_i) = 0$, αρκεί η σειρά να συγκλίνει.

Δ.6.2_Γραμμικές_ΔΕΜΠ

- Μη ομογενείς ΔΕΜΠ

Θεωρούμε τη μη ομογενή ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = f(x, y)$.

Τότε η γενική λύση αυτής θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ + μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς.

Για την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = f(x, y)$$

λύνουμε διαδοχικά την αλυσίδα των ΔΕΜΠ

$$(D_x - \omega_n D_y)u_1 = f(x, y)$$

$$(D_x - \omega_{n-1} D_y)u_2 = u_1$$

.....

$$(D_x - \omega_1 D_y)z = u_{n-1}$$

ξεκινώντας από την πρώτη και καταλήγοντας στην τελευταία, από την οποία βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση z .

Δ.6.2_Γραμμικές_ΔΕΜΠ

Πρόταση Έστω η μη ομογενής γραμμική ΔΕΜΠ

$$(D_x - \omega D_y)u = f(x, y).$$

Τότε μία μερική λύση της, είναι η:

$$u = \int f(x, a - \omega x) dx$$

στην οποία, μετά την ολοκλήρωση, αντικαθιστούμε το a με $y + \omega x$.