

Δ.5.1_Τριπλά_ολοκληρώματα

• Κίνηση ρευστών

Ορισμός Έστω S μία κλειστή επιφάνεια και $D \subset \mathbb{R}^3$ η κλειστή στερεά περιοχή που περικλείεται από την επιφάνεια S .

Έστω $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ ένα διανυσματικό πεδίο που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στην περιοχή D . Τότε το

$$I = \iiint_D (\operatorname{div} \vec{F}) dx dy dz$$

είναι η **ροή** του διανυσματικού πεδίου δια μέσου της επιφάνειας S .

- Αν $I > 0$, τότε το ρευστό τείνει να εγκαταλείψει την D και
- Αν $I < 0$, τότε το ρευστό τείνει να εισέλθει στην D .

Αν $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ είναι η ταχύτητα του υγρού στην D , τότε το

$$V = \iiint_D (\operatorname{div} \vec{u}) dx dy dz$$

είναι ο **όγκος** του υγρού που διαπερνά την S στη μονάδα του χρόνου.

Δ.5.1_Τριπλά_ολοκληρώματα

- **Μάζα και κέντρο μάζας**

Ορισμός Θεωρούμε μία στερεά περιοχή $D \subset \mathbb{R}^3$ στην οποία έχει κατανεμηθεί μάζα με πυκνότητα που περιγράφεται από τη συνάρτηση πυκνότητας μάζας $\sigma(x, y, z)$.

Τότε η συνολική **μάζα** m στην στερεά περιοχή D δίνεται από τον τύπο

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

και το **κέντρο μάζας** $K(x_K, y_K, z_K)$ έχει συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις

$$x_K = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad y_K = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad z_K = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}.$$