

ΚΕΦΑΛΑΙΟ:

ΑΚΡΟΤΑΤΑ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΠΟΛΛΩΝ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του n -διάστατου χώρου $\mathbb{R}^n$ και έστω μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f η οποία ορίζεται στο U .

Ορισμός Ένα σημείο P του U λέγεται **απόλυτο ελάχιστο** (αντίστοιχα **απόλυτο μέγιστο**) της πραγματικής συνάρτησης f , αν $f(P) \leq f(X)$ (αντίστοιχα $f(P) \geq f(X)$), $\forall X \in U$.

Ορισμός Ένα σημείο P του U λέγεται **τοπικό** ή **σχετικό ελάχιστο** (αντίστοιχα **τοπικό** ή **σχετικό μέγιστο**) της πραγματικής συνάρτησης f , αν υπάρχει μία περιοχή $B(P, a) \subset U$ τέτοια ώστε $f(P) \leq f(X)$ (αντίστοιχα $f(P) \geq f(X)$), $\forall X \in B(P, a)$.

Ορισμός Ένα σημείο P του ανοικτού συνόλου U ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** της πραγματικής συνάρτησης f , αν

$$D_1 f(P) = D_2 f(P) = \dots = D_n f(P) = 0.$$

Θεώρημα Αν $P \in U$ τοπικό ακρότατο της πραγματικής συνάρτησης f , τότε το P είναι κρίσιμο σημείο της f .

Θεώρημα (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και έστω ακόμη ότι το P είναι κρίσιμο σημείο της f . Για συντομία χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

και τις ορίζουσες

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$,
τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$,
τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0$,
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,
τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

Άσκηση Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3.$$

Απάντηση

$$\text{Λύνουμε το σύστημα} \quad \left. \begin{array}{l} \partial f / \partial x_1 = 0 \\ \partial f / \partial x_2 = 0 \\ \partial f / \partial x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \\ 2x_3 - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2/3 \\ x_2 = -1/3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Οπότε για το κρίσιμο σημείο $P\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} a_{11} &= D_1^2 f(P) = 2 & a_{12} &= D_1 D_2 f(P) = -1 & a_{13} &= D_1 D_3 f(P) = 0 \\ a_{21} &= D_2 D_1 f(P) = -1 & a_{22} &= D_2^2 f(P) = 2 & a_{23} &= D_2 D_3 f(P) = 0 \\ a_{31} &= D_3 D_1 f(P) = 0 & a_{32} &= D_3 D_2 f(P) = 0 & a_{33} &= D_3^2 f(P) = 2 \end{aligned}$$

Επομένως για τις ορίζουσες των Εσσιανών πινάκων προκύπτουν οι παρακάτω τιμές

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Sylvester, στο P έχουμε τοπικό ελάχιστο και $f(P) = -4/3$.

Άσκηση Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

Απάντηση Λύνουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ xy - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y(x - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

Συνεπώς $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ ή $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

απ' όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι: $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(1,1)$, $P_4(1,-1)$.

Υπολογίζουμε τις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$.

Οπότε $\Delta_2 = [(6x - 6)(6x - 6) - (6y)^2] = 36[(x - 1)^2 - y^2]$.

Στο $P_1(0,0)$ είναι $\Delta_1 = -6 < 0$ και $\Delta_2 = 36 > 0$, άρα έχουμε τοπικό μέγιστο $f_{\max} = f(P_1) = 4$.

Στο $P_2(2,0)$ είναι $\Delta_1 = 6 > 0$ και $\Delta_2 = 36 > 0$, άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο $f_{\min} = f(P_2) = 0$.

Στο $P_3(1,1)$ είναι $\Delta_1 = 0$, άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P_3 .

Στο $P_4(1,-1)$ είναι $\Delta_1 = 0$, άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P_4 .