

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2025 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

[Οι φοιτητές/-ριες του 1^{ου} έως 8^{ου} έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3, 4, 5.
Οι φοιτητές/-ριες του 9^{ου}, 10^{ου}, ..., έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3 και 4.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.]

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν $\vec{F}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} - 2xz \vec{j} + 2yz \vec{k}$, να βρεθούν:

$$\alpha) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \quad (\text{ή ισοδύναμα } \text{grad}(\text{div} \vec{F})), \quad \beta) \text{rot}(\text{rot} \vec{F}).$$

,

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω $z = z(x, y) = \frac{xy}{x - y}$. Να υπολογιστεί η παράσταση $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς

$$z = x^2 + y^2$$

όπου $0 \leq z \leq 1$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Αν $u = u(x, y, z)$ να βρεθεί η γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

$$\alpha) u_{yy} = z + 2x, \quad \beta) u_{xyz} = 4.$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\|, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}, \quad f = f(x, y, z), \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$S = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt, \quad \vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Sylvester)

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

$$E = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx, \quad E = \iint_D dx dy, \quad V = \iiint_D dx dy dz$$

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$m = \iint_D \sigma(x, y) dx dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma(x, y) dx dy}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma(x, y) dx dy}{m}$$

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$E = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{ροή διανυσματικού πεδίου } \vec{F})$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{u}) dx dy dz \quad (\text{όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα } \vec{u})$$

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0.$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x\varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1}\varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1}x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i\{\varphi_2[y + (a + i\beta)x] - \varphi_2[y + (a - i\beta)x]\}.$$

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \dots (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0.$$

$$z = e^{\frac{\gamma_1 x}{a_1}} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } a_1 \neq 0, \quad \text{ ή } \quad z = e^{\frac{-\gamma_1 y}{\beta_1}} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } \beta_1 \neq 0.$$

$$e^{\frac{\gamma_1 x}{a_1}} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x\varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1}\varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right] \quad \left| \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y} \quad \right| \quad \left| \quad u = \int f(x, a - \omega x) dx \right|$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2yz) = 2xy + 2y = 2y(x+1)$$

και επομένως

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = 2y\vec{i} + 2(x+1)\vec{j}.$$

β) Είναι

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = (2z + 2x)\vec{i} + (-2z - x^2)\vec{k}$$

και τελικά

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2(z+x) & 0 & -2z-x^2 \end{vmatrix} = 2(x+1)\vec{j}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y) - xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2y(x-y)^2 - y^2 \cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{2y(x-y) + 2y^2}{(x-y)^3}$$

Οπότε

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2 y^2}{(x-y)^3} + \frac{-4xy^2(x-y) - 4xy^3}{(x-y)^3} + \frac{2x^2 y^2}{(x-y)^3} = 0.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= x^2 \\ x^4 - x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

από όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$.

$$\text{Υπολογίζουμε τις } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

$$\text{Οπότε } \Delta_2 = [(6x)(6y) - (-3)^2] = 36xy - 9.$$

$$\text{Στο } P_1(0,0) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = 0 \text{ άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.}$$

$$\text{Στο } P_2(1,1) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = 6 > 0 \text{ και } \Delta_2 = 27 > 0 \text{ άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο}$$

$$f_{\min} = f(P_2) = -1.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Είναι

$$\begin{aligned} E &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right\} d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (1 + 4\rho^2)^{1/2} (1 + 4\rho^2)' d\rho \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1 + 4\rho^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{\rho=0}^1 d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (5^{3/2} - 1) d\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (5^{3/2} - 1) [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5^ο

$$u_{yy} = z + 2x \Rightarrow$$

$$\alpha) u_y = yz + 2xy + f(x, z) \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{2} y^2 z + xy^2 + yf(x, z) + g(x, z).$$

$$u_{xyz} = 4 \Rightarrow$$

$$\beta) u_{xy} = 4z + f(x, y) \Rightarrow$$

$$u_x = 4yz + f(x, y) + g(x, z) \Rightarrow$$

$$u = 4xyz + f(x, y) + g(x, z) + h(y, x)$$