

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2024 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

[Οι φοιτητές/-ριες του 1^{ου} έως 7^{ου} έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3, 4, 5.
Οι φοιτητές/-ριες του 8^{ου}, 9^{ου}, ..., έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3 και 4.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.]

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν $f(x, y) = xy \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + e^{-xy}$, να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της δεύτερης μερικής παραγώγου $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ στο σημείο $P_0(1, 0)$. [Δίνεται ότι και $(\tan^{-1} x)' = (\text{τοξεφ} x)' = \frac{1}{1+x^2}$]

ΘΕΜΑ 2^ο

Να υπολογιστεί η στροφή (ή περιστροφή) του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = (x^3 + xy^2)\vec{i} + (x^2y + y^3)\vec{j} + (2z)\vec{k}.$$

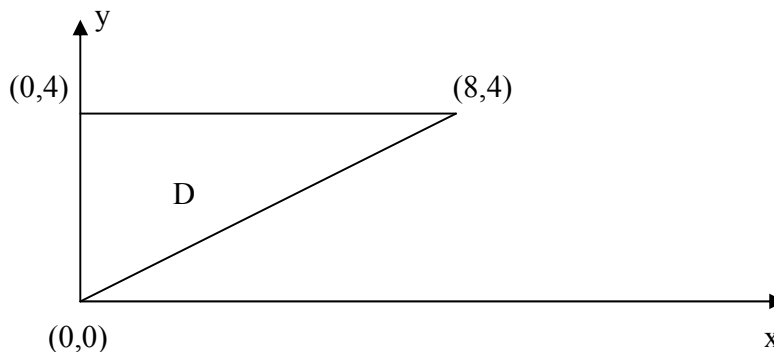
ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x^2 - 6y^2 + 7.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να βρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{3y}{\sqrt{100 - y^3}}$ στην περιοχή D που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0)$, $(8, 4)$, $(0, 4)$, $(0, 0)$.



ΘΕΜΑ 5^ο

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} - 5z\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + z\right) = 0.$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\|, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}, \quad f = f(x, y, z), \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Sylvester)

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

$$E = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx, \quad E = \iint_D dx dy, \quad V = \iiint_D dx dy dz$$

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$m = \iint_D \sigma(x, y) dx dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma(x, y) dx dy}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma(x, y) dx dy}{m}$$

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$E = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{ροή διανυσματικού πεδίου } \vec{F})$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{u}) dx dy dz \quad (\text{όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα } \vec{u})$$

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0.$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x \varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1} x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i \{ \varphi_2[y + (a + i\beta)x] - \varphi_2[y + (a - i\beta)x] \}.$$

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \dots (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0.$$

$$z = e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } a_1 \neq 0, \quad \text{ή} \quad z = e^{\frac{\gamma_1}{\beta_1} y} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } \beta_1 \neq 0.$$

$$e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x \varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right] \quad \left| \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y} \quad \right| \quad \left| \quad u = \int f(x, a - \omega x) dx \right|$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + xy \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - ye^{-xy} = y \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - ye^{-xy}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + y \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{2xy(x^2 + y^2) - xy^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} - e^{-xy} + xye^{-xy} = \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} - e^{-xy} + xye^{-xy} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} - e^{-xy} + xye^{-xy}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} = \tan^{-1} 0 - 1 = -1.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Είναι } \operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + xy^2 & x^2y + y^3 & 2z \end{vmatrix} = (0 - 0)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + (2xy - 2xy)\vec{k} = \vec{0}$$

ΘΕΜΑ 3°

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ xy - y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{συνεπώς } y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι: $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(1,1)$, $P_4(1,-1)$.

$$\text{Υπολογίζουμε τις } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y.$$

$$\text{Οπότε } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6 \quad \Delta_2 = [(6x - 6)(6x - 6) - (6y)^2] = 36[(x-1)^2 - y^2].$$

$$\text{Στο } P_1(0,0) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = -6 < 0, \quad \Delta_2 = 36 > 0, \text{ άρα έχουμε τ.μ. } f_{\max} = f(P_1) = 5.$$

$$\text{Στο } P_2(2,0) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = -6 > 0 \quad \Delta_2 = 36 > 0, \text{ άρα έχουμε τ.ε. } f_{\min} = f(P_2) = -1.$$

Στο $P_3(1,1)$ είναι $\Delta_2 = -36 < 0$, άρα έχουμε σαγματικό σημείο.

Στο $P_4(1,-1)$ είναι $\Delta_2 = -36 < 0$, άρα έχουμε σαγματικό σημείο.

ΘΕΜΑ 4°

Υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{3y}{\sqrt{100-y^3}} dx dy &= \int_{y=0}^4 \left\{ \int_{x=0}^{2y} \frac{3y}{\sqrt{100-y^3}} dx \right\} dy \\ &= \int_0^4 \frac{3y}{\sqrt{100-y^3}} [x]_{x=0}^{2y} dy \\ &= \int_0^4 \frac{6y^2}{\sqrt{100-y^3}} dy \\ &= -2 \int_0^4 \frac{d(100-y^3)}{\sqrt{100-y^3}} \\ &= -4 \left[\sqrt{100-y^3} \right]_{y=0}^4 = 16. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5°

Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_X + 4D_Y - 5)^2 (D_X + 3D_Y)(D_X + 2D_Y + 1) = 0.$$

Στον αναλύσιμο παράγοντα $(D_X + 4D_Y - 5)^2$ αντιστοιχεί η $e^{5x} [\varphi_3(y-4x) + x\varphi_4(y-4x)]$

Στον ομογενή παράγοντα $D_X + 3D_Y$ αντιστοιχεί η λύση $\varphi_1(y-3x)$.

Στον αναλύσιμο παράγοντα $D_X + 2D_Y + 1$ αντιστοιχεί η λύση $e^{-x}\varphi_2(y-2x)$.

Άρα η γενική λύση είναι

$$z = e^{5x} [\varphi_1(y-4x) + x\varphi_2(y-4x)] + \varphi_3(y-3x) + e^{-x}\varphi_4(y-2x).$$