



**Άσκηση 1.** Μία δοκός από χάλυβα πρέπει να φέρει φορτίο 6867 Newtons με μία ελαστική παραμόρφωση όχι μεγαλύτερη από 0,025%. Ποια είναι η ελάχιστη επιτρεπόμενη διατομή της δοκού;  $E=20,6 \times 10^4 \text{ Newtons.mm}^{-2}$

#### Λύση

Για την ελαστική παραμόρφωση ισχύει ο νόμος του Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

όπου  $\sigma$  είναι η εφαρμοσμένη τάση,  $E$  το μέτρο ελαστικότητας και  $\varepsilon$  η παραμόρφωση. Από τον ορισμό της τάσης  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

όπου  $F$  είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη στη μονάδα επιφάνειας και  $A_0$  η αρχική επιφάνεια. Εξισώνουμε τις δυο πιο πάνω σχέσεις:

$$\frac{F}{A_0} = E \cdot \varepsilon \Rightarrow A_0 = \frac{F}{E \cdot \varepsilon} = \frac{6867}{20,6 \times 10^4 \times 0,00025} = 133,34 \text{ mm}^2.$$

Άρα η επιτρεπόμενη διατομή είναι  $A_0 = 133,34 \text{ mm}^2$ .

**Άσκηση 2.** Σε δοκιμασία εφελκυσμού βρέθηκε ότι το όριο αναλογίας  $\sigma_y$  (ή όριο διαρροής) ενός κράματος χαλκού-ψευδάργυρου είναι  $206,01 \text{ Newtons.mm}^{-2}$ . Το μέτρο ελαστικότητας  $E$  είναι  $10,99 \times 10^4 \text{ Newtons.mm}^{-2}$ . Πόσο πρέπει είναι το μέγιστο μήκος ώστε να μην υποστεί μόνιμη παραμόρφωση; Αρχικό μήκος 2,5m.

#### Λύση

Εφαρμόζουμε το νόμο του Hooke για το όριο αυτό,  $\sigma_y = E \cdot \varepsilon$ , όπου η παραμόρφωση:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma_y = E \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma_y \cdot l_0}{E} = \frac{206,01 \times 2500}{10,99 \times 10^4} = 4,69 \text{ mm και}$$

$$l_{\text{ολ}} = l_0 + \Delta l = 2500 + 4,69 = 2504,69 \text{ mm}$$

Άρα για μήκος μέχρι τα 2504,69mm δεν θα έχουμε μόνιμη παραμόρφωση.

**Άσκηση 3.** Η αντοχή σε εφελκυσμό  $\sigma_{ts}$  ενός τύπου χάλυβα είναι  $539,55 \text{ Newtons.mm}^{-2}$ . Μία ράβδος διαστάσεων 20mm x 30mm παραμορφώνεται σε μία διατομή 13mm x 20mm προτού θραυστεί με φορτίο 245250 Newtons. α) Ποιό είναι το μέγιστο φορτίο που μπορεί να φέρει η ράβδος; β) Ποιά είναι η μέγιστη τάση πριν από την θραύση; γ) Ποιό είναι το όλκιμο;

#### Λύση

α) Το μέγιστο φορτίο υπολογίζεται από την αντοχή σε εφελκυσμό  $\sigma_{ts}$  από τη σχέση:

$$\sigma_{ts} = \frac{F_{\text{μέγιστη}}}{A_0} \Rightarrow F_{\text{μέγιστη}} = \sigma_{ts} \cdot A_0 = 539,55 \times 20 \times 30 = 323730 \text{ Newtons}$$

β) Η μέγιστη τάση πριν από την θραύση υπολογίζεται από το φορτίο θραύσης και από τη νέα ελαττωμένη διατομή:



$$\sigma_{\text{μέγ.}} = \frac{F_{\theta\rho.}}{A_{\theta\rho.}} = \frac{245250}{13 \times 20} = 943,27 \text{ Newtons} \cdot \text{mm}^{-2}$$

γ) Το όγκιμο εκφράζεται σαν ελάττωση της διατομής και δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{όγκ.}} = \frac{A_0 - A}{A_0} \times 100 = \frac{20 \times 30 - 13 \times 20}{20 \times 30} \times 100 = 57\%$$

**Άσκηση 4.** Ένα σύρμα από χαλκό έχει ονομαστική τάση θραύσης  $2,967 \times 10^2 \text{ Newtons} \cdot \text{mm}^{-2}$  και μείωση της επιφάνειας κατά 77%. Υπολογίστε την πραγματική τάση εφελκυσμού (φορτίο θραύσης/πραγματική επιφάνεια) και την πραγματική παραμόρφωση  $\varepsilon_{\text{πράγ.}}$  στο σημείο θραύσης. (Η στιγμιαία παραμόρφωση δε είναι ίση προς dl/l).

Λύση

Η ονομαστική τάση εφελκυσμού είναι :

$$\sigma_n = \frac{F}{A_0} = 2,967 \times 10^2 \text{ Newtons} \cdot \text{mm}^{-2} \Rightarrow F = 2,967 \times 10^2 \cdot A_0.$$

Η πραγματική τάση εφελκυσμού είναι :

$$\sigma_{\text{πράγ.}} = \frac{F}{A_{\text{πράγ.}}} = \frac{F}{(1-0,77)A_0} = \frac{2,967 \times 10^2 A_0}{0,23A_0} = 12,9 \times 10^2 \text{ Newtons} \cdot \text{mm}^2.$$

Η παραμόρφωση είναι:  $d\varepsilon = \frac{dl}{l}$ , Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε:

$$\varepsilon_{\text{πράγ.}} = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0}$$

Επειδή ο όγκος δεν μεταβάλλεται, προκύπτει ότι:

$$A_0 \cdot l_0 = A_1 \cdot l_1 \Rightarrow \frac{l_1}{l_0} = \frac{A_0}{A_1} \text{ όπου } A_1 = 0,23A_0, \Rightarrow \frac{l_1}{l_0} = \frac{A_0}{0,23A_0}$$

$$\varepsilon_{\text{πράγ.}} = \ln \frac{A_0}{0,23A_0} = \frac{1}{0,23} = 1,47 \text{ ή } \varepsilon_{\text{πράγ.}} = 147\%$$

**Άσκηση 5.** Σε μία κυλινδρική ράβδο από ορείχαλκο διαμέτρου 10mm εφαρμόζεται αξονική θλιπτική τάση  $-20 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{-2}$ . Εάν η παραμόρφωση είναι πλήρως ελαστική, να υπολογίσετε: 1) την αξονική και την εγκάρσια παραμόρφωση, 2) το μέγεθος του απαιτούμενου φορτίου, ώστε να παραχθεί αλλαγή στη διάμετρο ίση με  $2,7 \times 10^{-3} \text{ mm}$ . Το E είναι  $97 \text{ GPa} \cdot \text{mm}^{-2}$  και το  $\nu=0,34$ .

Λύση

1) Κατά την εφαρμογή της θλιπτικής τάσης  $-20 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{-2}$ , η ράβδος συρρικνώνεται στη διεύθυνση z και ταυτόχρονα υφίσταται αύξηση της διαμέτρου στη διεύθυνση x.

Η αξονική παραμόρφωση (στη διεύθυνση z) είναι:



$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = -\frac{20\text{MPa}}{97\text{GPa}} = -0,206 \times 10^{-3}$$

Η εγκάρσια παραμόρφωση (στη διεύθυνση x) είναι:

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z = -0,34 \times (-0,206 \times 10^{-3}) = 0,07 \times 10^{-3}$$

2) Κατά την εφαρμογή του θλιπτικού φορτίου η ράβδος συρρικνώνεται στη διεύθυνση z και ταυτόχρονα υφίσταται αύξηση της διαμέτρου κατά  $\Delta d$  ίση με  $2,7 \times 10^{-3}$  mm στη διεύθυνση x. Η παραμόρφωση στη διεύθυνση x είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{2,7 \times 10^{-3} \text{ mm}}{10 \text{ mm}} = 2,7 \times 10^{-4}$$

το θετικό πρόσημο οφείλεται στην αύξηση της διαμέτρου. Υπολογίζουμε την αξονική παραμόρφωση (στη διεύθυνση z) γνωρίζοντας ότι ο λόγος Poisson είναι 0,34 οπότε έχουμε:

$$\varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x}{\nu} = -\frac{2,7 \times 10^{-4}}{0,34} = -7,94 \times 10^{-4}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Hooke για να βρούμε την απαιτούμενη τάση:

$$\sigma = \varepsilon_z E = -7,94 \times 10^{-4} \times 97 \text{ GPa} = -77 \text{ MPa}$$

Το απαιτούμενο θλιπτικό φορτίο είναι:

$$F = -\sigma A_0 = -\sigma \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 \pi = (77 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \left(\frac{10 \times 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^2 \pi = -6.044 \text{ N}$$

Στην περίπτωση που εφαρμόζεται εφελκυστικό φορτίο θα είχαμε αντίθετα πρόσημα. Κατά την εφαρμογή ενός εφελκυστικού φορτίου η ράβδος επιμηκύνεται στη διεύθυνση z και ταυτόχρονα υφίσταται μείωση της διαμέτρου κατά  $\Delta d$  ίση με  $2,7 \times 10^{-3}$  mm στη διεύθυνση x.

### Ασκήσεις για λύση

**Άσκηση 1.** Να υπολογίσετε το μέτρο ελαστικότητας ενός κράματος αλουμινίου γνωρίζοντας ότι μία τάση 35.000psi παράγει παραμόρφωση 0,0035. Να υπολογίσετε το μήκος μιας ράβδου από το κράμα αυτό μετά την παραμόρφωσή της όταν εφαρμόζεται τάση 30000psi. Αρχικό μήκος 50in.

**Άσκηση 2** Σε ράβδο αλουμινίου με αρχικό μήκος 2in και διάμετρο 0,505in η αντοχή σε εφελκυσμό  $\sigma_{ts}$  είναι 8000lb και η παραμόρφωση αντιστοιχεί σε διάμετρο 0,497in και μήκος 2,12in. Το φορτίο θραύσης είναι 7600lb που αντιστοιχεί σε διάμετρο 0,398in και μήκος 2,205in. Να συγκρίνετε τη μηχανική τάση και παραμόρφωση με την πραγματική τάση και παραμόρφωση για το μέγιστο φορτίο και το φορτίο θραύσης.

**Άσκηση 3.** Οι άκρες χαλύβδινης ράβδου μήκους 15 cm και διατομής  $1,5 \text{ cm}^2$ , στηρίζονται ανάμεσα σε δύο σημεία σε θερμοκρασία  $35^\circ \text{ C}$ . Πόση είναι η δύναμη που



θα ασκηθεί από τα υποστηρίγματα στην ράβδο, όταν κατεβάσουμε τη θερμοκρασία στους  $10^{\circ}\text{C}$ ; Δίνονται το μέτρο του Young  $E=2,28 \times 10^{11}\text{N/m}^2$  και ο θερμικός συντελεστής γραμμικής διαστολής  $\alpha=11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .

**Άσκηση 4.** Χαλύβδινη ράβδος, μήκους 20 cm της οποίας η εγκάρσια διατομή έχει εμβαδόν  $2\text{ cm}^2$ , θερμαίνεται από τους  $20^{\circ}\text{C}$  στους  $200^{\circ}\text{C}$ . Ποια δύναμη πρέπει να ασκηθεί πάνω στα άκρα της για να εμποδίσει τη διαστολή της; μέτρο του Young  $E=2 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$  και ο θερμικός συντελεστής γραμμικής διαστολής  $\alpha=11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ .