



### Ασκήσεις

**1. Παράδειγμα υπολογισμού συγκέντρωσης ηλεκτρονίων και ταχύτητας:** Να υπολογίσετε τη θερμική ταχύτητα Fermi και την οριακή ταχύτητα, την ευκινησία, την πυκνότητα ρεύματος για το χαλκό όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι 1000V/m. Η ειδική αντίσταση του χαλκού στους 25<sup>0</sup>C είναι 1,72.10<sup>8</sup> Ωm και η πυκνότητα 8,9.10<sup>3</sup> Kg/m<sup>3</sup>. Ατομικό βάρος 63,54.

Λύση

Η μέση θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων  $\bar{v}$  μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη γνωστή από την κινητική θεωρία των αερίων κατανομή Maxwell-Boltzmann. Για σωματίδιο (ηλεκτρόνιο) κινούμενο προς τις τρεις

διευθύνσεις έχουμε:

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \bar{v} = \left[ \frac{3kT}{m} \right]^{1/2}$$

Η θερμική ταχύτητα στο επίπεδο Fermi  $v_F$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_F = \left[ \frac{2E_F}{m} \right]^{1/2} = \frac{h}{2m} \left[ \frac{3n}{\pi} \right]^{1/3}$$

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά m<sup>3</sup> ισούται με τον αριθμό των ατόμων ανά m<sup>3</sup> επειδή το κάθε άτομο προσφέρει ένα ηλεκτρόνιο.

$$n \frac{\text{ηλεκτρόνια}}{\text{m}^3} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ άτομα/mole}}{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/mole}} = 0,84 \cdot 10^{29} \frac{\text{άτομα}}{\text{m}^3}$$
$$\frac{0,84 \cdot 10^{29} \text{ άτομα/m}^3}{8,9 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε  $v_F = 1,5 \cdot 10^5$  m/s

Η ευκινησία των ηλεκτρονίων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mu = \frac{1}{\rho n e} = \frac{1}{1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ohm.m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{electron}} \cdot 0,84 \cdot 10^{29} \frac{\text{electron}}{\text{m}^3}} = 4,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

Η οριακή ταχύτητα  $v_d$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_d = \mu \cdot E = 4,33 \text{ m/s}$$

Προκύπτει ότι  $v_F = \bar{v} \gg v_d$

Η πυκνότητα ρεύματος J υπολογίζεται από τη σχέση

$$J = n e v_d = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$$

Παρατηρούμε ότι η οριακή ταχύτητα των ηλεκτρονίων  $v_d$  είναι πολύ μικρή



2. Σχεδιάστε μια γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας μήκους 1500m η οποία θα μεταφέρει ρεύμα με απώλεια ισχύος  $5 \times 10^5 \text{W}$  χρησιμοποιώντας πινάκες με την ειδική αγωγιμότητα διαφόρων μετάλλων από τη βιβλιογραφία ( $R=200\Omega$ ).

Λύση

Η ηλεκτρική ισχύς δίνεται από το γινόμενο της τάσης και της έντασης του ρεύματος  $P=VI=I^2 R=(50)^2 R=5 \times 10^5 \text{W}$  και με  $R=200\Omega$  έχουμε:

$$A = \frac{l}{R \cdot \sigma} = \frac{(1500\text{m})(100\text{cm/m})}{(200\Omega) \cdot \sigma} = \frac{750}{\sigma} (\text{cm}^2)$$

Αν λάβουμε υπόψη 3 μέταλλα με μεγάλη αγωγιμότητα, αλουμίνιο, χαλκός και άργυρος, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

| Μέταλλο   | $\sigma(\Omega^{-1}\text{cm}^{-1})$ | $A(\text{cm}^2)$ | Διάμετρος (cm) |
|-----------|-------------------------------------|------------------|----------------|
| Αλουμίνιο | $3,77 \times 10^5$                  | 0,00199          | 0,050          |
| Χαλκός    | $5,98 \times 10^5$                  | 0,00125          | 0.040          |
| Άργυρος   | $6,80 \times 10^5$                  | 0,00110          | 0.037          |

Οποιοδήποτε από τα 3 μέταλλα θα λειτουργήσει, αλλά το κόστος είναι επίσης σημαντικός παράγοντας. Το αλουμίνιο είναι πιθανότητα η πιο οικονομική επιλογή παρόλου που έχει μεγαλύτερη διάμετρο. Άλλοι παράγοντες, όπως το αν το σύρμα, μπορεί να υποστηριχτεί μεταξύ των πόλων μετάδοσης, συμβάλλουν στην τελική επιλογή.

**3. Παράδειγμα εξάρτησης της αντίστασης από τη θερμοκρασία.** Μια οικιακή συσκευή (τοστιέρα) χρησιμοποιεί 300watts όταν είναι σε λειτουργία και το θερμαντικό στοιχείο της (από Νικέλιο-Χρώμιο) στους  $870^\circ\text{C}$ . Η συσκευή λειτουργεί σε γραμμή των 110V. Πόσα amperes περνούν: α) όταν είναι ζεστή ( $<870^\circ\text{C}$ ), β) Μόλις μπει σε λειτουργία ( $20^\circ\text{C}$ ). Ο θερμικός συντελεστής της ειδικής αντίστασης (βρέθηκε από μετρήσεις) του θερμαντικού στοιχείου στους  $20^\circ\text{C}$  είναι  $0,0004 \text{K}^{-1}$ . Να θεωρήσετε ότι παραμένει ίδιος όταν το θερμαντικό στοιχείο είναι ζεστό.

Λύση

$$\alpha) I_{870^\circ} = \frac{300\text{W}}{110\text{V}} = 2,7\text{A}$$

$$R_{870^\circ} = \frac{110\text{V}}{2,7\text{A}} = 40\text{ohm}$$

β) Από τη σχέση  $R = \rho \frac{L}{A}$  έχουμε:

$$\frac{R_{20^\circ}}{R_{870^\circ}} = \frac{\rho_{20^\circ}}{\rho_{870^\circ}}$$

Από τη σχέση  $\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha_0(T - T_0)]$  :

$$R_{20^\circ} = R_{870^\circ} \cdot \frac{\rho_0(1+0,0004 \cdot 20)}{\rho_0(1+0,0004 \cdot 870)} = 40\text{ohm} \frac{1,008}{1,35} = 30\text{ohm}$$



$$I_{20^{\circ}} = \frac{110V}{30\Omega m} = 3,7A$$

Παρατηρούμε ότι η αντίσταση αυξάνει με την αύξηση της θερμοκρασίας. Εάν η ένταση του ρεύματος παρέμεινε στα 3,7A, η θερμοκρασία της συσκευής θα συνέχιζε να αυξάνει και πέρα από τους 870<sup>0</sup>C με συνέπεια ταχύτερη οξείδωση και καταστροφή του θερμοαντικου στοιχείου.

**4. Παράδειγμα του κανόνα του MATTHIESSEN:** Οι τιμές της ειδικής αντίστασης του καθαρού χαλκού και του ορείχαλκου σύστασης 85Cu%-15Zn % είναι 1,7x10<sup>-6</sup> ohm.cm και 6,2x10<sup>-6</sup> ohm.cm, αντίστοιχα στους 20<sup>0</sup>C. Η ειδική αντίσταση του καθαρού χαλκού στους -100<sup>0</sup>C είναι 0,9x10<sup>-6</sup> ohm.cm. Να υπολογίσετε την ειδική αντίσταση του ορείχαλκου στους -100<sup>0</sup>C.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του MATTHIESSEN και έχουμε:

$$\rho_{\text{ολ}} = \rho_L(T) + \rho_{\text{Residual}}$$

$$\text{Στους } 20^{\circ}\text{C: } \rho_{85\%-15\%} = 6,2 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm} = 1,7 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm} + \rho_{\text{Residual}} \Rightarrow$$

$$\rho_{\text{Residual}} \Rightarrow 4,5 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm}$$

$$\text{Στους } -100^{\circ}\text{C: } \rho_{85\%-15\%} = 0,9 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm} + 4,5 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm} \Rightarrow$$

$$\rho_{85\%-15\%} = 5,4 \times 10^{-6} \text{ ohm.cm}$$

**5.** Η ειδική αντίσταση ενός σύρματος από αλουμίνιο στους 25<sup>0</sup>C βρέθηκε από μετρήσεις ότι είναι 2,72x10<sup>-8</sup> Ωm και ο θερμικός συντελεστής της ειδικής αντίστασης του αλουμινίου στους 0<sup>0</sup>C ότι είναι 4,29x10<sup>-3</sup> K<sup>-1</sup>. Το αλουμίνιο έχει σθένος 3, πυκνότητα 2,70gcm<sup>-3</sup> και ατομικό βάρος 27. Να υπολογίσετε α) την ειδική αντίσταση στους -40<sup>0</sup>C. β) το θερμικό συντελεστή της ειδικής αντίστασης στους -40<sup>0</sup>C. γ) το μέσο ελεύθερο χρόνο μεταξύ των σκεδάσεων και την ευκινησία των ηλεκτρονίων στους 25<sup>0</sup>C δ) Πόση θα είναι η εκατοστιαία μεταβολή στις απώλειες ισχύος του σύρματος εξαιτίας της θέρμανσης Joule όταν η θερμοκρασία πέφτει από τους 25<sup>0</sup>C στους -40<sup>0</sup>C. ε) Εάν η μέση θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας είναι 1,5x10<sup>6</sup> m.s<sup>-1</sup>, να υπολογίσετε τη μέση ελεύθερη διαδρομή και να τη συγκρίνετε με την ενδοατομική απόσταση. ζ) Πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο πάχος των γραμμών αγωγής από αλουμίνιο σε ένα τσιπ IC έτσι ώστε η ειδική αντίσταση της γραμμής να είναι ίδια με αυτή ενός σύρματος αλουμινίου.

Λύση

Η σχέση που δίνει τη θερμοκρασιακή εξάρτηση της ρ είναι:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha_0(T - T_0)]$$

όπου ρ<sub>0</sub> και α<sub>0</sub> είναι αντίστοιχα η ειδική αντίσταση και ο θερμικός συντελεστής της ρ στη θερμοκρασία αναφοράς T<sub>0</sub> που μπορεί να είναι 0<sup>0</sup>C ή 25<sup>0</sup>C.

α) Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για T=-40<sup>0</sup>C και T=25<sup>0</sup>C παίρνοντας ως T<sub>0</sub>=0<sup>0</sup>C ή T=0<sup>0</sup>C +273=273K, και έχουμε:



$$\rho(-40\text{ }^\circ\text{C} + 273 = 233\text{ K}) = \rho_0[1 + \alpha_0(233\text{ K} - 273\text{ K})]$$

$$\rho(25\text{ }^\circ\text{C} + 273 = 298\text{ K}) = \rho_0[1 + \alpha_0(298\text{ K} - 273\text{ K})]$$

Διαιρούμε τις δυο εξισώσεις για να απαλείψουμε το  $\rho_0$ .

$$\rho(-40\text{ }^\circ\text{C})/\rho(25\text{ }^\circ\text{C}) = [1 + \alpha_0(-40\text{ K})] / [1 + \alpha_0(25\text{ K})]$$

Με αντικατάσταση των τιμών  $\rho(25\text{ }^\circ\text{C})$  και  $\alpha_0(0\text{ }^\circ\text{C})$  προκύπτει:

$$\rho(-40\text{ }^\circ\text{C}) = (2.72 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}) \frac{[1 + (4.29 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1})(-40\text{ K})]}{[1 + (4.29 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1})(25\text{ K})]}$$

$$\rho(-40\text{ }^\circ\text{C}) = 2.03 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}$$

β) Ο θερμοκός συντελεστής της ειδικής αντίστασης στους  $-40\text{ }^\circ\text{C}$ :

$$\rho(25\text{ }^\circ\text{C}) = \rho(-40\text{ }^\circ\text{C})[1 + \alpha_{-40}(298\text{ K} - 233\text{ K})]$$

$$\alpha_{-40} = [\rho(25\text{ }^\circ\text{C}) - \rho(-40\text{ }^\circ\text{C})] / [\rho(-40\text{ }^\circ\text{C})(65\text{ K})]$$

$$\alpha_{-40} = [2.72 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m} - 2.03 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m}] / [(2.03 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m})(65\text{ K})]$$

$$\alpha_{-40} = 5.23 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$$

γ) Υπολογίζουμε το μέσο ελεύθερο χρόνο  $\tau$  μεταξύ των σκεδάσεων των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας στους  $25\text{ }^\circ\text{C}$  από την παρακάτω σχέση:

$$1/\rho = e^2 n \tau / m_e$$

$$\tau = m_e / \rho e^2 n$$

Η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων  $n$  υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την ατομική πυκνότητα του αλουμινίου  $\rho_{Al}$  (δηλ. την ατομική πυκνότητα της κυψελίδας) με το σθένος που είναι 3 (δηλ. το κάθε άτομο συνεισφέρει τρία ηλεκτρόνια στο μέταλλο). Η ατομική πυκνότητα του αλουμινίου προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\rho_{Al} = \frac{N_A d}{M_{at}} = \frac{(6.022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(2700\ \text{kg/m}^3)}{(0.027\ \text{kg/mol})} = 6.022 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

Η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων  $n$  είναι:

$$n = 3 \rho_{Al} = 1.807 \times 10^{29}\ \text{m}^{-3}$$

Οπότε ο μέσος ελεύθερος χρόνος  $\tau$  και η ευκινήσια των ηλεκτρονίων θα είναι:

$$\tau = \frac{m_e}{\rho e^2 n} = \frac{(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{(2.72 \times 10^{-8}\ \Omega\ \text{m})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 (1.807 \times 10^{29}\ \text{m}^{-3})}$$

$$\tau = 7.22 \times 10^{-15}\ \text{s}$$



$$\mu_d = \frac{e\tau}{m_e} = \frac{(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(7.22 \times 10^{-15} \text{ s})}{(9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})}$$

$$\mu_d = 1.27 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = 12.7 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

δ) Η ισχύς  $P=I^2R$  είναι ανάλογη της  $\rho$ ,  $P = I^2 \rho \frac{l}{S}$  οπότε θα έχουμε:

$$[P(-40^\circ\text{C}) - P(25^\circ\text{C})] / P(25^\circ\text{C}) = P(-40^\circ\text{C}) / P(25^\circ\text{C}) - 1$$

$$= \rho(-40^\circ\text{C}) / \rho(25^\circ\text{C}) - 1$$

$$= (2.03 \times 10^{-8} \Omega \text{ m} / 2.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}) - 1$$

$$= -0.254, \text{ or } -25.4\%$$

Αρνητικό αποτέλεσμα σημαίνει ότι έχουμε μείωση στην απώλεια ισχύος.

ε) Η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι:

$$l = v_F \tau = (1.5 \times 10^6 \text{ m s}^{-1})(7.22 \times 10^{-15} \text{ s}) \approx 1.08 \times 10^{-8} \text{ m} \approx 10.8 \text{ nm}$$

ζ) Η ειδική αντίσταση των μετάλλων καθορίζεται από δύο μηχανισμούς σκέδασης των ηλεκτρονίων: τις σκεδάσεις με τα φωνόνια και τις σκεδάσεις με τις κρυσταλλικές ατέλειες μέσα στο μέταλλο, σύμφωνα με τον **κανόνα του MATTHIessen**. Στην περίπτωση που το μέταλλο είναι σε μορφή φιλμ (π.χ. γραμμές αγωγής από αλουμίνιο σε ένα τσιπ), θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις σκεδάσεις από τις επιφάνειες του φιλμ, οπότε σύμφωνα με τον κανόνα του Matthiessen θα προστεθεί μία επιπλέον ειδική αντίσταση λόγω αυτών των σκεδάσεων. Μπορούμε να παραλείψουμε τις σκεδάσεις από τις επιφάνειες του φιλμ όταν το πάχος του είναι πολύ μεγαλύτερο από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων. Επομένως οι γραμμές αλουμινίου στο τσιπ θα έχουν την ίδια ειδική αντίσταση με αυτήν του σύρματος αλουμινίου όταν το πάχος των γραμμών είναι πολύ μεγαλύτερο από 10,8nm.

### Ασκήσεις

1. Από μετρήσεις σε αγωγούς μήκους 10 m και κυκλικής διατομής με διάμετρο 1.5mm προέκυψαν οι παρακάτω τιμές αντιστάσεων. Να υπολογιστούν οι ειδικές αντιστάσεις και οι ειδικές αγωγιμότητες των υλικών. Να γίνει ταυτοποίηση των υλικών.

| Αγωγός | Αντίσταση (Ω) | Αγωγός | Αντίσταση (Ω) |
|--------|---------------|--------|---------------|
| 1      | 1 0,973321    | 4      | 1,380758      |
| 2      | 5,658842      | 5      | 0,922391      |
| 3      | 1,595794      |        |               |



2. Η μέγιστη επιτρεπόμενη πτώση τάσης στις καλωδιώσεις χαλκού ( $\rho=1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ) μιας οικιακής εγκατάστασης είναι 5%. Να υπολογιστούν οι ελάχιστες απαιτούμενες διαμέτροι διατομής των καλωδιώσεων για τις παρακάτω περιπτώσεις α) Αγωγός μήκους 20 m, μέγιστο ρεύμα 25 A, β) Αγωγός μήκους 20 m, μέγιστο ρεύμα 10 A, γ) Αγωγός μήκους 30 m, μέγιστο ρεύμα 35 A.

3. Να υπολογιστεί η μέση θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων για θερμοκρασίες: 10K, 100 K, 300 K και 1000 K. Σε ποιά θερμοκρασία αντιστοιχεί μέση θερμική ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός;

4. Έστω ότι στο κρυσταλλικό πλέγμα του σιδήρου (Fe) κάθε άτομο συνεισφέρει ένα ηλεκτρόνιο στο νέφος ηλεκτρονίων. Υποθέτοντας ότι η κρυσταλλική δομή είναι BCC και η ατομική ακτίνα του μεταλλικού δεσμού είναι 124 pm, να βρεθούν: α) Η ατομική πυκνότητα, β) Η πυκνότητα των ηλεκτρονίων που συνεισφέρουν στην αγωγιμότητα. γ) Η ευκινησία των ηλεκτρονίων στον σίδηρο χρησιμοποιώντας την ειδική αντίσταση  $\rho=10 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

4. Στα κυκλώματα πυριτίου νέας γενιάς οι γραμμές αγωγής από αλουμίνιο έχουν αντικατασταθεί από χαλκό. Στους 300K, η ειδική αντίσταση του καθαρού χαλκού  $\rho_L$  είναι  $1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  και το μήκος ελεύθερης διαδρομής 47nm. Όταν εισάγονται στο χαλκό 2% κ.β. προσμίξεις νικελίου (για να βελτιωθούν οι μηχανικές ιδιότητες) η ειδική αντίσταση του χαλκού  $\rho_{ολικό}$  είναι  $1,95 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Να υπολογίσετε την παραμένουσα ειδική αντίσταση και το μήκος ελεύθερης διαδρομής των ηλεκτρονίων εξαιτίας των σκεδάσεων με τις προσμίξεις. Η μέση τιμή της θερμικής ταχύτητα στους 300K είναι  $1,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ .

5. Μία αγώγιμη γραμμή σε ένα τσιπ IC έχει μήκος 2,8 χιλιοστά (mm) και ορθογώνια διατομή  $1 \times 4$  μικρόμετρα ( $\mu\text{m}$ ). Κατά μήκος της γραμμής ένα ρεύμα 5  $\mu\text{A}$  δημιουργεί πτώση τάσης 100 mV. Να προσδιοριστεί η συγκέντρωση ηλεκτρονίων αν δοθεί ότι η ευκινησία τους είναι  $500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ .

6. Ο καθαρός χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $1,728 \cdot 10^{-6} \text{ ohm} \cdot \text{cm}$  και μέση ελεύθερη διαδρομή 40nm στους 300K. Να υπολογίσετε την ειδική αντίσταση του χαλκού με 1% προσμίξεις νικελίου αν η μέση ελεύθερη διαδρομή λόγω των σκεδάσεων των ηλεκτρονίων με τις προσμίξεις είναι 60 nm. Η μέση θερμική ταχύτητα στους 300K είναι  $1,2 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}$ .