

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Ασκήσεις στην Ολοκλήρωση

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0 dx = c, \quad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 2^x dx$$

Υπόδειξη: $a^x = e^{x \ln a}$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{2024} dx$$

Υπόδειξη: Πώς μπορούμε να αποφύγουμε να αναπτύξουμε τη δύναμη;

Ασκήσεις

$$\int \frac{2023x + 1}{x^2 + 2024} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e (x \ln x + 2x) dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e \frac{1}{x \ln x + 2x} dx$$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε ό,τι σας προβληματίζει.

Ασκήσεις

$$\int \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} dx$$

Ασκήσεις

$$\int \ln x \left(\left(\frac{x}{e} \right)^x + \left(\frac{e}{x} \right)^x \right) dx$$

Υπόδειξη: Βρείτε την παράγωγο του $\left(\frac{x}{e} \right)^x$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x^{2024} - 1}{x^{506} - 1} dx$$

Υπόδειξη: Ποια είναι η σχέση των αριθμών 506 και 2024;

Ασκήσεις

$$\int_1^2 \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{2x(1-x)^2}{1+x^2} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

Υπόδειξη: Παραγοντοποιήστε τον παρονομαστή.

Ασκήσεις

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^4 + 3x^2 + 1) \arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε την παράγωγο του όρου με την \arctan .

Ασκήσεις

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^4 + 16} dx$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε με x^2 .

Ασκήσεις

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^4}} dx$$

Υπόδειξη: Διαιρέστε με x^2 .

Ασκήσεις

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} 2 \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{3}} \right) dx$$

Ασκήσεις

$$\int 2^x x^2 dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{-1}^1 \arccos x \, dx$$

Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε την αντιπαράγωγο του $\arccos x$ αλλά γνωρίζουμε την παράγωγό του: $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

Ασκήσεις

$$\int \tan^3 x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int \arctan(\sqrt{x}) \, dx$$

Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε την αντιπαράγωγο του $\arctan x$ αλλά γνωρίζουμε την παράγωγό του: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Ασκήσεις

$$\int_0^{2\pi} \arccos(\sin x) dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n k x^{k-1} dx$$

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Ασκήσεις

$$\int \frac{(x-1)^{\ln(x+1)}}{(x+1)^{\ln(x-1)}} dx$$

Υπόδειξη: $a^x = e^{x \ln a}$

Ασκήσεις

$$\int_{-1}^1 (5x^3 - 3x)^3 dx$$

Υπόδειξη: Ίσως δεν χρειάζεται να υψώσετε!

Ασκήσεις

$$\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^5 dx$$

Υπόδειξη: Οι $\sin x$ και $\cos x$ έχουν πολύ καλές συμμετρικές και αντισυμμετρικές σχέσεις.

Ασκήσεις

$$\int_0^{2\pi} (\sinh x + \cosh x)^5 dx$$

Υπόδειξη: Οι $\sinh x$ και $\cosh x$ είναι αλγεβρικές και όχι τριγωνομετρικές συναρτήσεις!

Ασκήσεις

$$\int \cos^x x (\ln(\cos x) - x \tan x) dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e x^{\frac{1}{\ln x}} dx$$

Υπόδειξη: $a^x = e^{x \ln a}$

Ασκήσεις

$$\int \frac{e^x}{(1 + e^x) \ln(1 + e^x)} dx$$

Υπόδειξη: Αντικαταστήστε ό,τι σας προβληματίζει.

Ασκήσεις

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{3 \cos x + 2 \sin x} dx$$

Υπόδειξη: Γράψτε τον αριθμητή ως γραμμικό συνδυασμό του παρονομαστή και της παραγώγου του παρονομαστή.

Θεώρημα Tonelli

Αν $f(x, y) \geq 0$ σχεδόν παντού στο $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$, τότε

$$\int_A \int_B f(x, y) dy dx = \int_B \int_A f(x, y) dx dy$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx$$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εφαρμόσετε το θεώρημα Tonelli.

