Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αόριστο Ολοκλήρωμα (2ο μέρος)

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

https://utopia.duth.gr/epdiaman/files/logismos/integral2.pdf

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0dx = c, \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+c.$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

$x>0$ $\qquad$ $x \geq 0$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$x>0$ $\qquad$ $x \neq 0$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x + \sqrt{x} + 1\right)dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Αξιοποιώντας τον ορισμό $dy = f'(x)dx$, μπορούμε εναλλακτικά, να γράψουμε:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Δραστηριότητα

Δείξτε ότι

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

$(e^{3x})' = 3e^{3x}$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$$\int x^2 (e^{3x})' dx = x^2 \cdot e^{3x} - \int (x^2)' \cdot e^{3x} dx$$

$$\int x^n e^{ax} dx, \qquad \int p(x) e^{ax} dx,$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^2 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' dx = \frac{1}{3} \int x^2 (e^{3x})' dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \int (x^2)' \cdot e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c,$$

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x (e^{3x})' dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$$\int x^n \sin \beta x dx, \qquad \int p(x) \sin \beta x dx,$$

$$\int x \cdot \sin(x) dx = -\int x (\cos x)' dx = -x \cdot \cos x + \int (x)' \cdot \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$$\int x^n \cos \beta x dx, \qquad \int p(x) \cos \beta x dx,$$

$$\int x \cos(x) dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$$\int e^{ax}\sin\beta x dx, \qquad \int e^{ax}\cos\beta x dx,$$

$(*)$ $\int e^x \cos x dx = \dfrac{e^x\cdot(\cos x+\sin x)}{2}$

$\int e^x\cos(x)dx = \int (e^x)'\cdot\cos x dx = e^x\cdot\cos x - \int e^x(\cos x)'dx$

1ο μέλος

$= e^x\cdot\cos x + \int e^x \sin x dx$

$= e^x\cdot\cos x + \int (e^x)'\cdot\sin x dx$

$= e^x\cdot\cos x + e^x\cdot\sin x - \int e^x\cos x dx \iff$

2ο μέλος

$\iff 2\int e^x\cos x dx = e^x(\cos x+\sin x) \iff (*)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$$\int x^n \ln ax\,dx$$

$$\int x^2 \ln(x)dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot (\ln x)'dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Περίπτωση I: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))\, dg(x) \overset{u=g(x)}{=\!=} \int f(u)\, du$

Θέτουμε $g(x) = u \Rightarrow g'(x)dx = du$ και $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$.

$f : A \to \mathbb{R}$

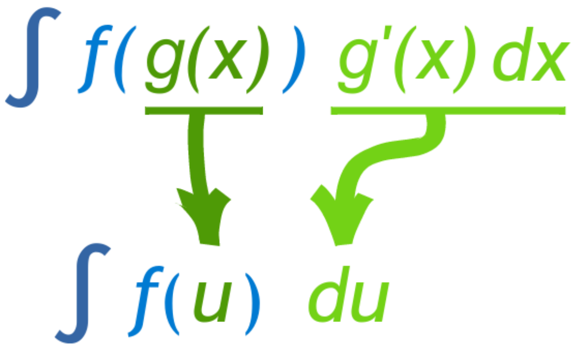
Περίπτωση II: $\int f(x)dx = \int f(g(t))\, dg'(t) = \int f(g(t))\cdot g'(t)dt$

Θέτουμε $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ και $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

$g : B \to A$

Και στις δύο περιπτώσεις επιδιώκουμε η αντικατάσταση να οδηγήσει σε ολοκλήρωμα που υπολογίζεται ευκολότερα από το αρχικό.

Περίπτωση Ι



Βήματα της μεθόδου

1. Αναγνωρίζουμε τη μορφή f(g(x))g’(x)dx = f(g(x))dg(x).
2. Αντικαθιστούμε u = g(x) και f(g(x))dg(x) = f(u)du.
3. Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα. Αυτό, προκύπτει ως συνάρτηση της μεταβλητής u.
4. Αντικαθιστούμε όπου u = g(x) και παίρνουμε το αποτέλεσμα ως προς τη μεταβλητή x.

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du}$$

$$\int f(u)\,du$$

$$\int 6\cos(x^2)\,x\,dx = \frac{6}{2}\int \cos(x^2)\cdot(x^2)'\,dx = 3\int \cos(x^2)\,dx^2 \overset{u=x^2}{=\!=} 3\int \cos u\,du = 3\sin u + c = 3\sin(x^2)+c.$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \overset{u=x^2+1}{=\!=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

$$\int (x+1)^3\,dx = \int (x+1)^3(x+1)'\,dx \overset{u=x+1}{=\!=} \int u^3\,du = \frac{u^4}{4}+c = \frac{(x+1)^4}{4}+c$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\cdot(2x)'dx \overset{u=2x}{=\!=} \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) + c.$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c.$$

$$\int \cos^2 x\,dx$$

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε τον τύπο για το διπλάσιο τόξο ($\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$, $\sin^2(x) = (1 – \cos(2x))/2$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\int \cos^3(x)dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cdot(\sin x)' dx$$

$$\overset{u=\sin x}{=\!=\!=} \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα

Περίπτωση I – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int f(x^2)d(x^2),\ \text{θέτουμε } y = x^2.$$

$$\int x\tan(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \tan(x^2)\cdot(x^2)'dx \xlongequal{u=x^2} \frac{1}{2}\int \tan u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin u}{\cos u}du = -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos u)'}{\cos u}du \xlongequal{t=\cos u} -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2)| + c.$$

$df(x) = f'(x)dx$

Περίπτωση I – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$du = (\sin x)'dx$

$\int f(\sin x)\cos x dx,$ θέτουμε $y = \sin x$

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx = \int \sqrt{\sin x} \cdot (\sin x)' dx \overset{u=\sin x}{=\!=\!=} \int \sqrt{u}\, du =$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Περίπτωση I – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(\cos x)\sin x dx, \qquad \text{θέτουμε } y = \cos x$$

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx =$$

Περίπτωση I – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx, \qquad \text{θέτουμε } y=\tan x$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int \sqrt{\tan x}\cdot(\tan x)' dx \overset{u=\tan x}{=\!=} \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}, \qquad \text{θέτουμε } y = f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}\,df(x) \overset{u=f(x)}{=\!=\!=} \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|f(x)| + c$$

Περίπτωση II

Η διαδικασία της αντικατάστασης γενικεύεται ως διαδικασία αλλαγής μεταβλητής σε κάθε ολοκλήρωμα.

Έστω f: A → R και $F(x) = \int f(x)dx$. Αν θέσουμε x = x(t) για κάποια κατάλληλη συνάρτηση x: B → A, τότε, η παράγουσα συνάρτηση εκφράζεται συναρτήσει της νέας μεταβλητής t ως εξής:

$$F(x(t)) = \int f(x(t))dx(t) = \int f(x(t))x'(t)\,dt,\ t \in B,$$

Σημείωση

Η πρώτη περίπτωση αντικατάστασης είναι ειδική περίπτωση της γενικής διαδικασίας με την αλλαγή μεταβλητής $x = g^{-1}(u)$.

Περίπτωση ΙΙ

Τι ιδιότητες πρέπει να έχει η συνάρτηση x = x(t), t ε B, ώστε να είναι έγκυρη η αλλαγή μεταβλητής;

Απάντηση

Η συνάρτηση x = x(t) πρέπει:

(α) να διατηρεί το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή πρέπει $x: B \to A$ (ώστε η συνάρτηση f(x(t)) να έχει το ίδιο σύνολο τιμών με αυτό της f.

(β) να παραγωγίζεται.

(γ) να μπορεί να αντιστρέφεται ώστε να είναι δυνατή η επίλυση της x = x(t) ως προς t και η επαναφορά στην αρχική μεταβλητή x.

Οι παραπάνω προϋποθέσεις τηρούνται όταν π.χ. η x(t) είναι παραγωγίσιμη και μονότονη συνάρτηση με σύνολο τιμών το $A = A_f$.

$$4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2.$$

Περίπτωση ΙΙ - Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ είναι το (-2, 2). Για το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής,

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση x(t) = 2sin t, έχει ως σύνολο τιμών ακριβώς το διάστημα αυτό όταν το t ϵ (-π/2, π/2), άρα είναι μία αποδεκτή αντικατάσταση.

Παρατηρήσεις

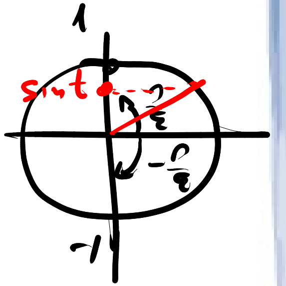
α) Στο τέλος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα cos(arcsin x) = $(1 - x^2)^{½}$, η οποία προκύπτει από την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα.

β) Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν θεωρήσουμε τον αριθμητή ως παράγωγο της υπόριζης συνάρτησης.

Κατ. Ι: $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(4-x^2)'}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\sqrt{4-x^2} + c.$

$$\cos^2(\arcsin x)+\sin^2(\arcsin x)=1 \iff \cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{1-x^2}$$

Περίπτωση ΙΙ - Παραδείγματα



$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \qquad f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ A_f=(-2,2)$$

Θέτω $x=g(t)=2\sin t$ με $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Είναι $dx=dg(t)=g'(t)\,dt=(2\sin t)'\,dt=2\cos t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{2\sin t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,dt=\int\frac{2\sin t}{\cancel{2\cos t}}\cdot\cancel{2\cos t}\,dt$$

$$=-2\cos t+c=-2\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$$

$$x=2\sin t\iff t=\arcsin\frac{x}{2}$$

$$=-2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=-\sqrt{4-x^2}+c$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Περίπτωση ΙΙ - Παραδείγματα

Παράδειγμα 2
Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}$ είναι όλο το R. Για το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$$

$x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση x(t) = 3sinh t, έχει ως σύνολο τιμών το R, όταν t є R, άρα είναι μία αποδεκτή αντικατάσταση.

Παρατηρήσεις
α) Το ολοκλήρωμα που προκύπτει αντιμετωπίζεται με τις μεθόδους επίλυσης τριγωνομετρικών με περιττή δύναμη.

$9+9\sinh^2 t = 9(1+\sinh^2 t) = 9\cosh^2 t$

$\cosh t = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Περίπτωση II - Παραδείγματα

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx = \int \frac{27\sinh^3 t}{\sqrt{9+9\sinh^2 t}} \cdot 3\cosh t\,dt = 27\int \sinh^3 t\,dt$$

Θέτω $x = 3\sinh t \Rightarrow dx = (3\sinh t)'dt = 3\cosh t\,dt$

$$\int \sinh^3 t\,dt = \int \sinh^2 t \cdot \sinh t\,dt = \int (\cosh^2 t - 1)\cdot(\cosh t)'dt$$

$$= \int (u^2-1)\,du = \frac{u^3}{3} - u + c = \frac{1}{3}\cosh^3 t - \cosh t + c =$$

$\boxed{\cosh(\text{argsinh}\,x) = \sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1}{3}\cosh^3\left[\text{argsinh}\frac{x}{3}\right] - \cosh\left[\text{argsinh}\frac{x}{3}\right] + c.$$

$\cosh^2(\text{argsinh}\,x) - \sinh^2(\text{argsinh}\,x) = 1$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right)^3 - \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} + c.$$

Περίπτωση ΙΙ – Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3})^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+(\sqrt{3})^2}}\frac{du}{\sqrt{2}} = (*)$$

Θέτω $\sqrt{2}x = u \Leftrightarrow x = \frac{u}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{2}}$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(u+\sqrt{u^2+(\sqrt{3})^2}\right)+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+3}\right)+c.$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a}+c = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

Περίπτωση ΙΙ – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης των x και $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Θέτουμε x = α sin(t), t є [-π/2, π/2], ή x = α cos(t), t є [0, π].

$$\int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

· Θέτω $x = 4\sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Περίπτωση ΙΙ – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης των x και $\sqrt{\alpha^2 + x^2}$

Θέτουμε x = α sinh(t), t є R, ή x = α tan(t), t є (-π/2, π/2).

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$$

Θέτω $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)\,dt$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\tan t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt =$$

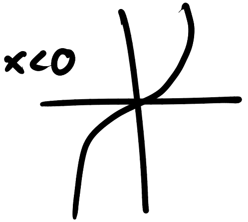
$$= \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = -\frac{1}{\cos t} + c = -\frac{1}{\cos(\arctan x)} + c = -\sqrt{1+x^2} + c$$

$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x \implies \sqrt{\cosh^2 x - 1} = |\sinh x|$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Περίπτωση II – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης:



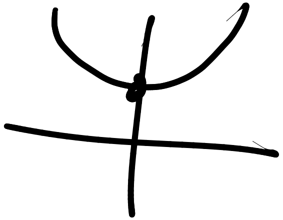
- των x και $\sqrt{x^2 - a^2}$ θέτουμε $x = a\cosh t, \quad t \geq 0,$

$x^2 - 1 > 0$ ή

ή $x = \dfrac{a}{\cos t}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$

$x^2 > 1$ ή $\to$ $x > 1$ ή $x < -1$

ή $x = \dfrac{a}{\sin t}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}.$



$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

. Θέτω $x = \cosh t \implies dx = \sinh t \, dt$

$x > 1$ ή $t > 0$

Σημείωση: Θέτοντας x = -cosh(t) καλύπτουμε την περίπτωση x < -1. (Επαληθεύστε πως το αποτέλεσμα είναι το ίδιο!)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{\cosh t}{|\sinh t|} \cdot \sinh t \, dt = \int \frac{\cosh t}{\cancel{\sinh t}} \cancel{\sinh t} \, dt =$$

$$= \int \cosh t = \sinh t + c = \sinh(\operatorname{arg}\cosh x) + c = \sqrt{x^2 - 1} + c$$