Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις
Υπερβολικές Συναρτήσεις
Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

https://utopia.duth.gr/epdiaman/files/logismos/hyperbolic.pdf

Κάθε Παρασκευή
11:00 – 12:00

Αμφιθέατρο Α4

Μία ώρα επιπλέον...

Συναρτήσεις

Δυνάμεις	x^{α}, $\alpha \in R$.
Πολυωνυμικές	$P(x) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots \alpha_1 z + \alpha_0$
Ρητές	$P(x) / Q(x)$
Εκθετική	$y = e^x$
Λογάριθμος	$y = \ln x$
Τριγωνομετρικές	sin (ημ), cos (συν), tan (εφ), cot (σφ)

Γραμμικοί συνδυασμοί και συνθέσεις των παραπάνω.

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε επιπλέον:

(α) Τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

(β) Τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αντίστροφες τριγωνομετρικές *απεικονίσεις*

Θυμόμαστε τον γεωμετρικό ορισμό των sin, cos, tan, cot;

Υπολογίζουμε:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ή } \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad \cot^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές *απεικονίσεις*

Ονομασία και συμβολισμός αντίστροφων απεικονίσεων:

Αντίστροφο ημίτονο	arcsin	ή	$\sin^{-1}$, με πεδίο ορισμού το [-1, 1].
Αντίστροφο συνημίτονο	arccos	ή	$\cos^{-1}$, με πεδίο ορισμού το [-1, 1].
Αντίστροφη εφαπτομένη	arctan	ή	$\tan^{-1}$, με πεδίο ορισμού το R.
Αντίστροφη συνεφαπτομένη	arccot	ή	$\cot^{-1}$, με πεδίο ορισμού το R.

π.χ. Να βρεθούν οι παρακάτω τιμές:

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} =$ $\frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi$ ή $\pi - \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$\arctan\sqrt{3} =$

$\arccos\frac{1}{2} =$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές *απεικονίσεις*

Από τον ορισμό:

Για κάθε x є [-1, 1]: sin(arcsin x) = x, cos(arccos x) = x.

Για κάθε x є R: tan(arctan x) = x, cot(arccot x) = x.

Για κάθε x є R:

arcsin (sin x) = x + 2kπ ή π - x +2kπ , k є Z.

arccos (cos x) = x + 2kπ ή x +2kπ , k є Z.

arctan (tan x) = x + kπ, k є Z.

arccot (cot x) = x + kπ, k є Z.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές *συναρτήσεις*

Η περιοδικότητα της sin x, κληρονομεί στην arcsin x άπειρες τιμές:

$$\sin(x + 2k\pi) = y \leftrightarrow \arcsin(y) = x + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Για να γίνει συνάρτηση η arcsin(x), αρκεί να περιορίσουμε τη sin(x) σε διάστημα μίας περιόδου. Επιλέγουμε το [-π/2, π/2] στο οποίο:

α) Η sin(x) είναι αύξουσα (άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση).
β) Σε αυτό καλύπτεται το πλήρες διάστημα τιμών [-1, 1] της sin(x).

Άρα, ο περιορισμός του arcsin(x) στο εύρος $-\pi/2 \le \arcsin(x) \le \pi/2$ διασφαλίζει ότι κάθε τιμή του $x \in [-1,1]$ αντιστοιχεί ακριβώς σε μία γωνία θ, καθιστώντας τη συνάρτηση αντίστροφου ημιτόνου καλά ορισμένη και συνεχή.

Σημείωση: Αν $f: R \to R$ αντιστρέψιμη και συνεχής συνάρτηση τότε η f^{-1} είναι συνεχής.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Επιλέγουμε:

$\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$,

$\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\mathrm{arccot}(x) \in (0, \pi)$.

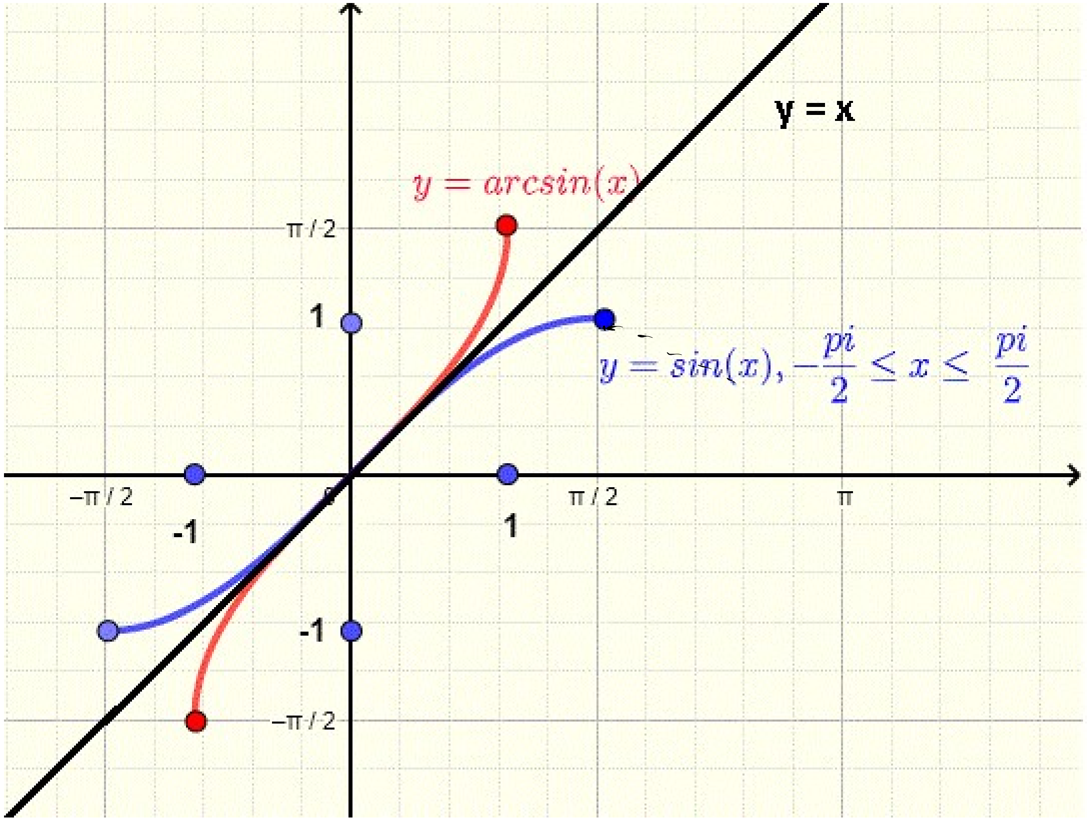
Δηλαδή, τελικά:

$\arcsin: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$,

$\arctan: R \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\mathrm{arccot}: R \to (0, \pi)$.

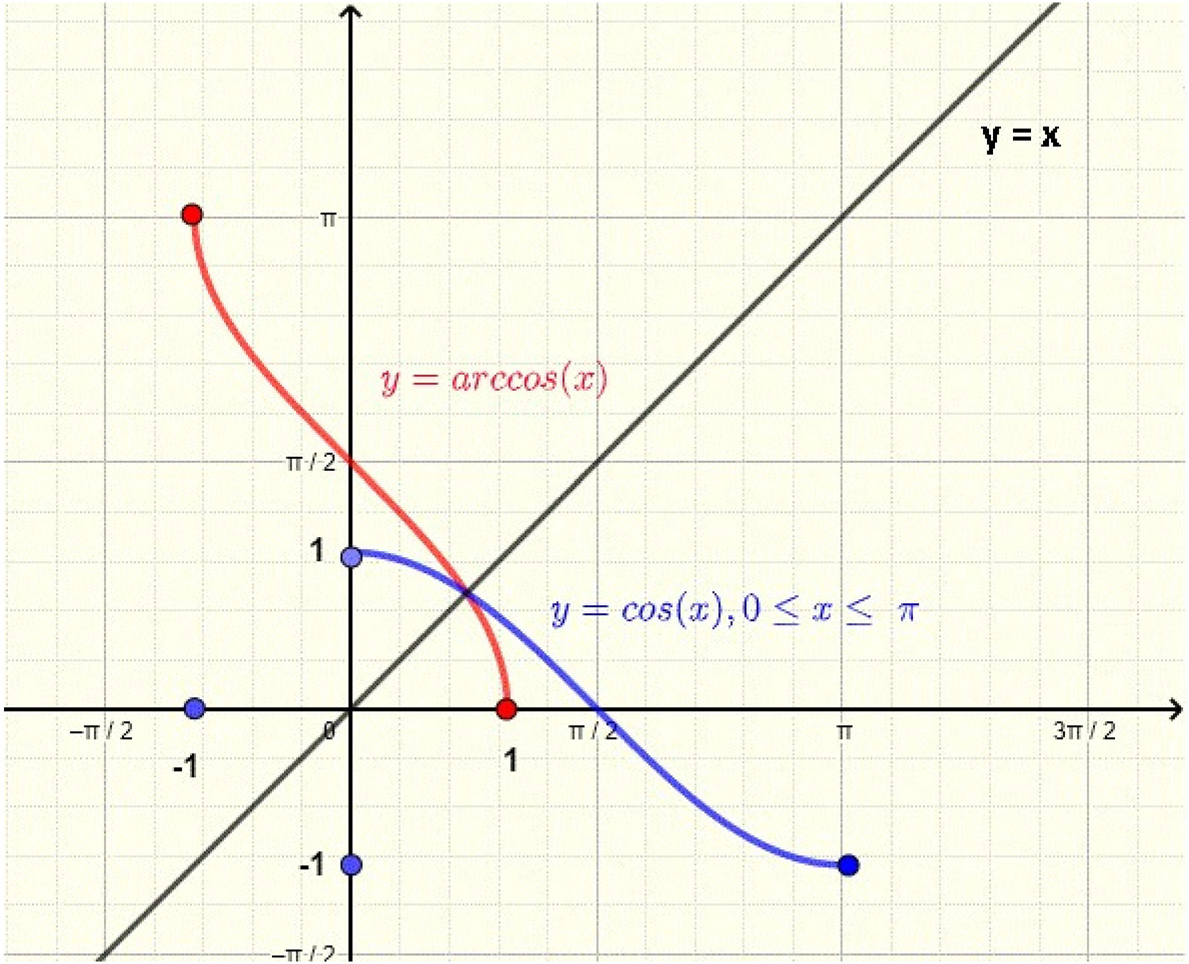
Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

arcsin: [-1, 1] → [-π/2, π/2].



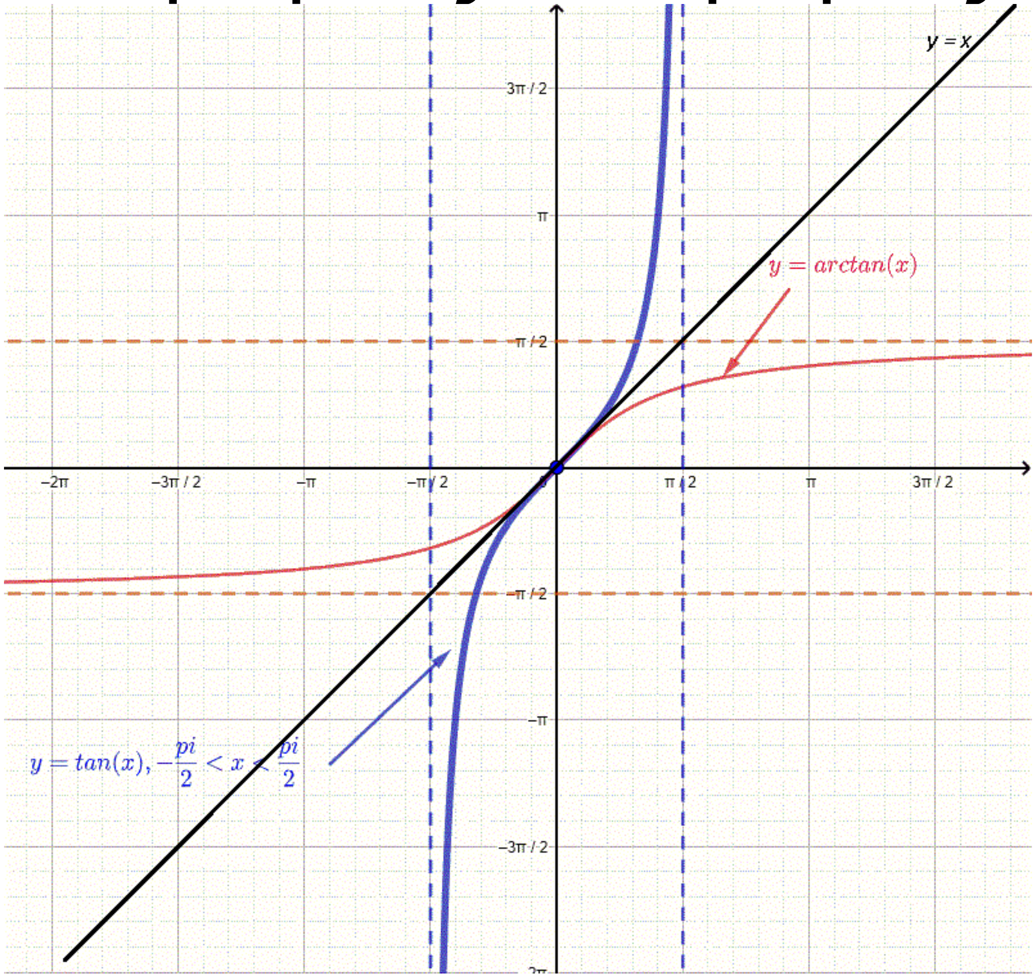
Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

arccos: [-1, 1] → [0, π].



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

arctan: R → (-π/2, π/2).



Ασκήσεις

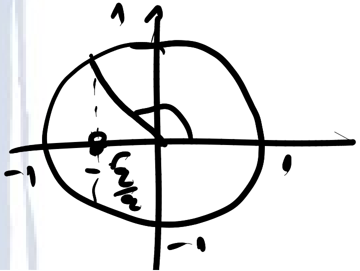
1. Να υπολογιστούν οι τιμές:

arcsin(cos(π/4)) $= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ή $\arcsin(\cos(\frac{\pi}{4})) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

arccos(sin(π/6)) $= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

arccos(sin(5π/4)) $= \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$.



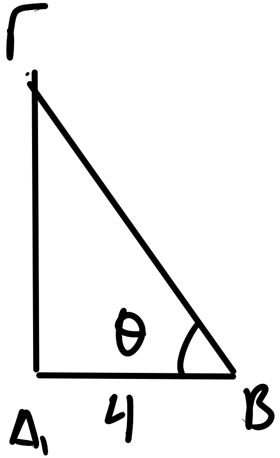
Ασκήσεις

2. Η γωνία θ σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \arctan(3/4).$$

κάθετη

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου αν η μία από τις πλευρές της θ είναι 4.



$$E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ τ.μ.}$$

$$\theta = \arctan\frac{3}{4} \iff \tan\theta = \frac{3}{4} \iff \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{4} \iff A\Gamma = 3$$

Ασκήσεις

3. Να δείξετε ότι:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2,\ x \in [-1, 1]$$

Υπόδειξη

Ξεκινήστε θέτοντας arcsin(x) = y.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = y \iff x = \sin y \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \iff$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - y = \arccos x \iff \frac{\pi}{2} = y + \arccos x \iff$$

$$\iff \frac{\pi}{2} = \arcsin x + \arccos x.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ισχύει ότι: $$\left(\mathbf{arcsin\,x}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}}$$

Πράγματι, αν y(x) = arcsin x є [-π/2, π/2], τότε

sin y(x) = x και cos y(x) · y'(x) = 1, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \; -1 < x < 1.$$

Παρατηρήσεις

1. Οι τιμές (arcsin (±1))' δεν υπάρχουν, γεγονός που αντιστοιχεί στη γεωμετρική παρατήρηση πως η εφαπτομένη της y = sinx στο ±π/2 είναι παράλληλη στον x'x, άρα η εφαπτομένη της arcsin x, στο ±1, θα είναι κάθετη στον x'x.

2. Η απόδειξη προκύπτει και ως εφαρμογή του θεωρήματος της Γ Λυκείου:
   Αν f είναι 1 - 1 και παραγωγίσιμη με $f'(x_0) \neq 0$, τότε $[f^{-1}(y_0)]' = 1/f'(x_0)$, με $y_0 = f(x_0)$.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι:

$$\left(\mathbf{arccos\,x}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{x}^{\mathbf{2}}}} \quad \left(\mathbf{arctan\,x}\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \mathbf{x}^{\mathbf{2}}} \quad \left(\mathbf{arccot\,x}\right)' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \mathbf{x}^{\mathbf{2}}}$$

Απόδειξη για την arctan

Αν y(x) = arctan, x є (-∞, ∞), τότε tan y(x) = x και (1 + $\tan^2$ y(x)) · y'(x) = 1, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y(x)} = \frac{1}{1 + x^2},\ x \in (-\infty, \infty).$$

Ασκήσεις

4. Να βρεθεί η παράγωγος:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin\left(2x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot (2x^2)' = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}, \quad |x|<1$$

Ασκήσεις

5. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\pi/2 - \arccos(x)}{x} \overset{DLH}{\underset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1.$$

Ασκήσεις

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} (\arctan x)'\,dx = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

Εκθετική Συνάρτηση

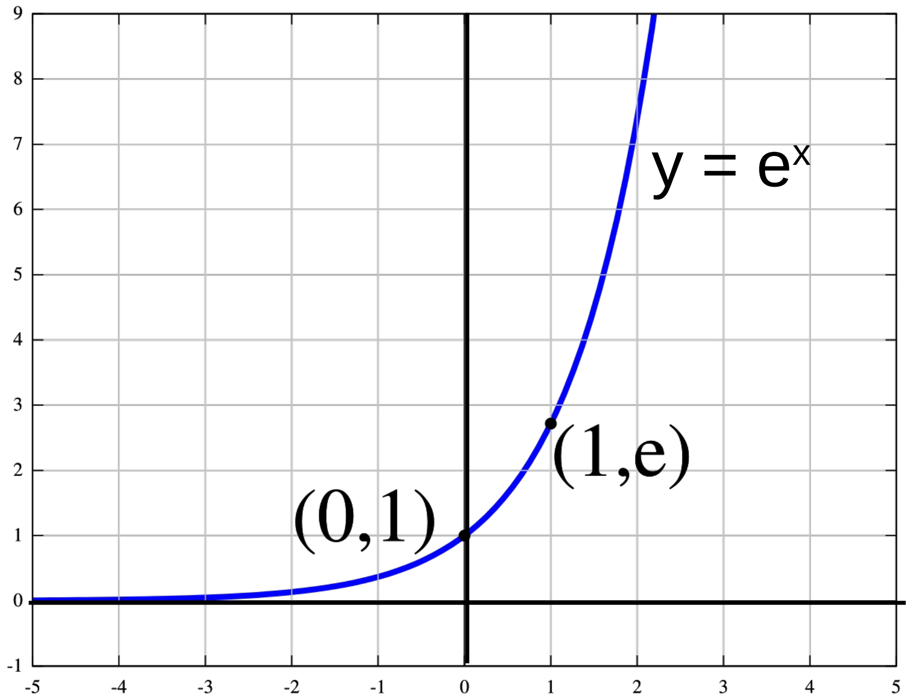
Ορισμός αριθμού e: $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$

$e^0 = 1,\ e^x e^y = e^{x+y},\ \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ αύξουσα.

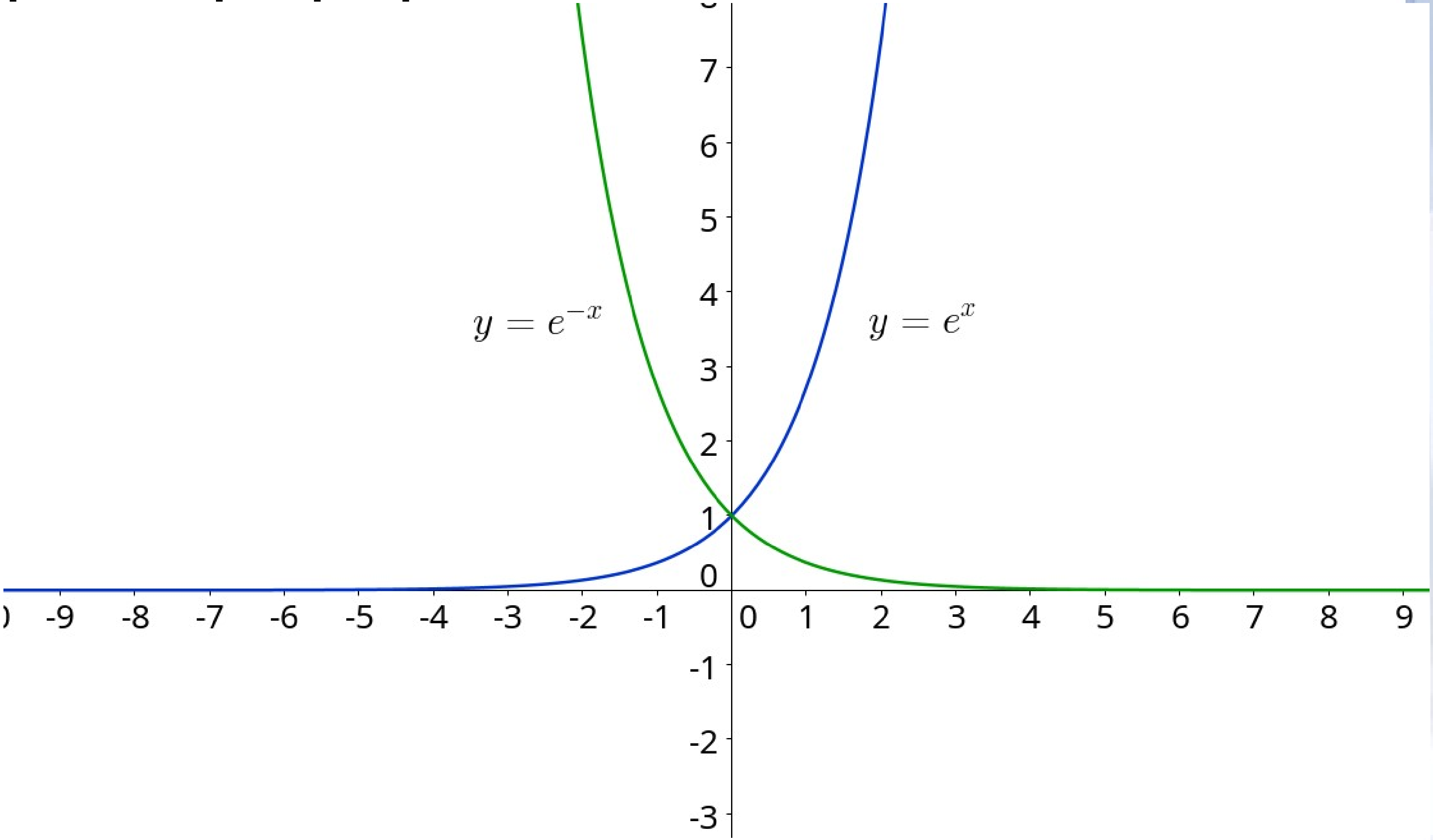
$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



Εκθετική Συνάρτηση

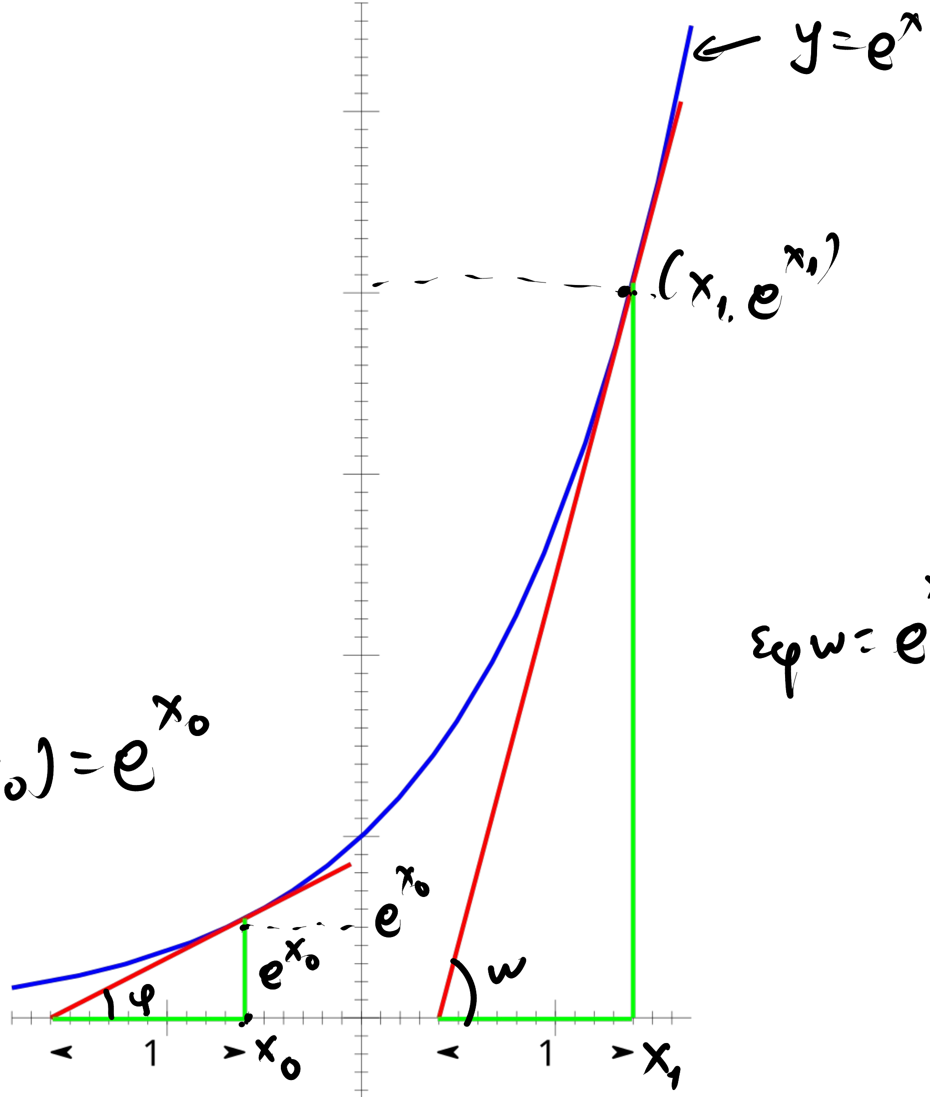
e ≈ 2.71828



Εκθετική Συνάρτηση

$(e^x)' = e^x$

$\varepsilon\varphi\,\varphi = f'(x_0) = e^{x_0}$



$\varepsilon\varphi\,\omega = e^{x_1}$

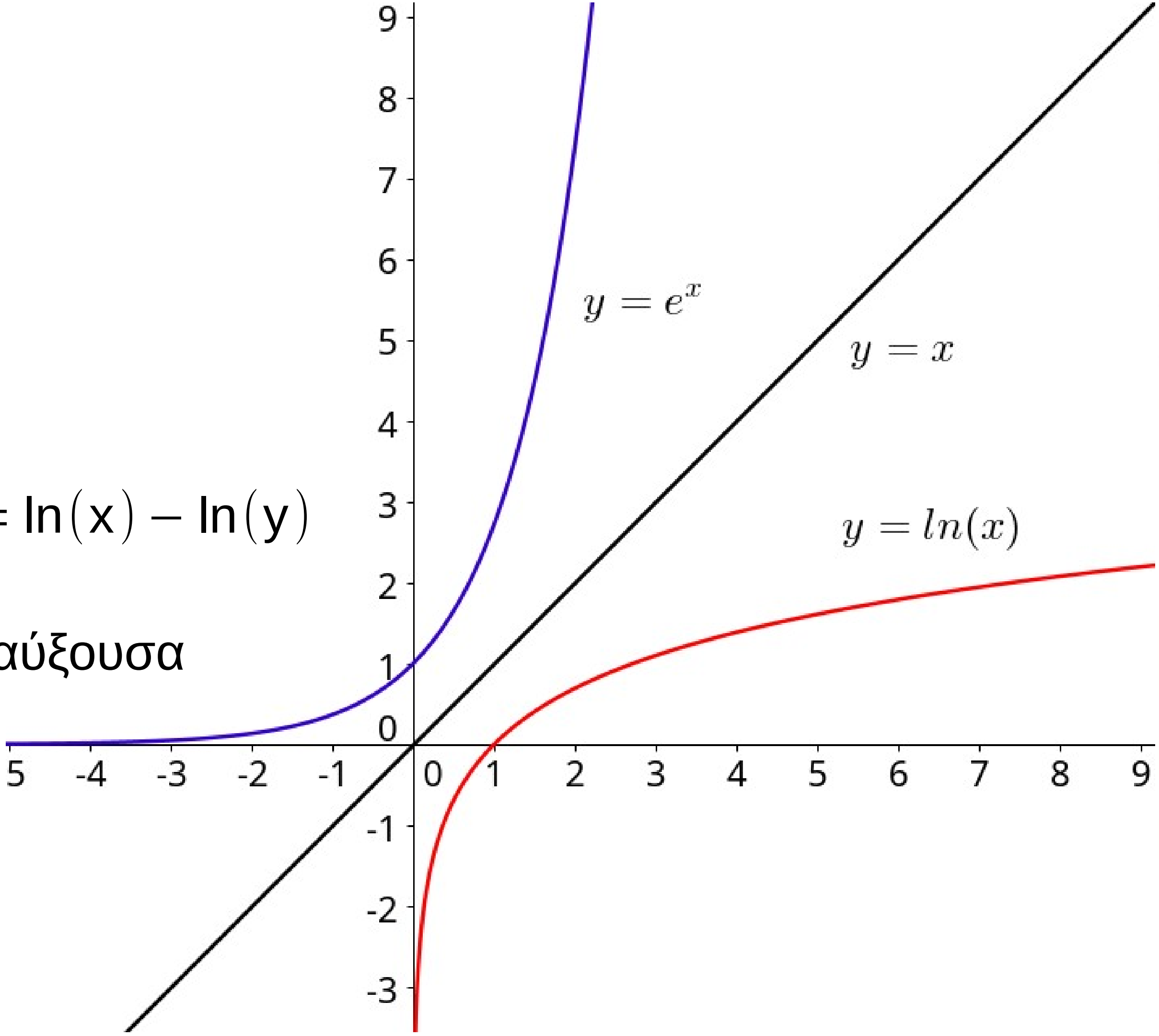
Λογαριθμική Συνάρτηση

Ορισμός: $\ln(x) = y \leftrightarrow x = e^y$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$y = e^x : \text{αύξουσα} \Leftrightarrow y = \ln(x) : \text{αύξουσα}$$



$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολικό ημίτονο $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

<u>Ιδιότητες</u>

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\sinh(-x) = -\sinh x$

Δραστηριότητες

(α) Αποδείξτε τις ιδιότητες 1, 2, 3.
(β) Να εκφραστούν τα e^x, e^{-x} συναρτήσει των sinhx, coshx.
(γ) Να δείξετε ότι $\cosh x \geq 1$.
(δ) Να λυθεί η ανίσωση $\cos x \geq \cosh x$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$

2. $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

3. $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{2} = -\sinh x.$

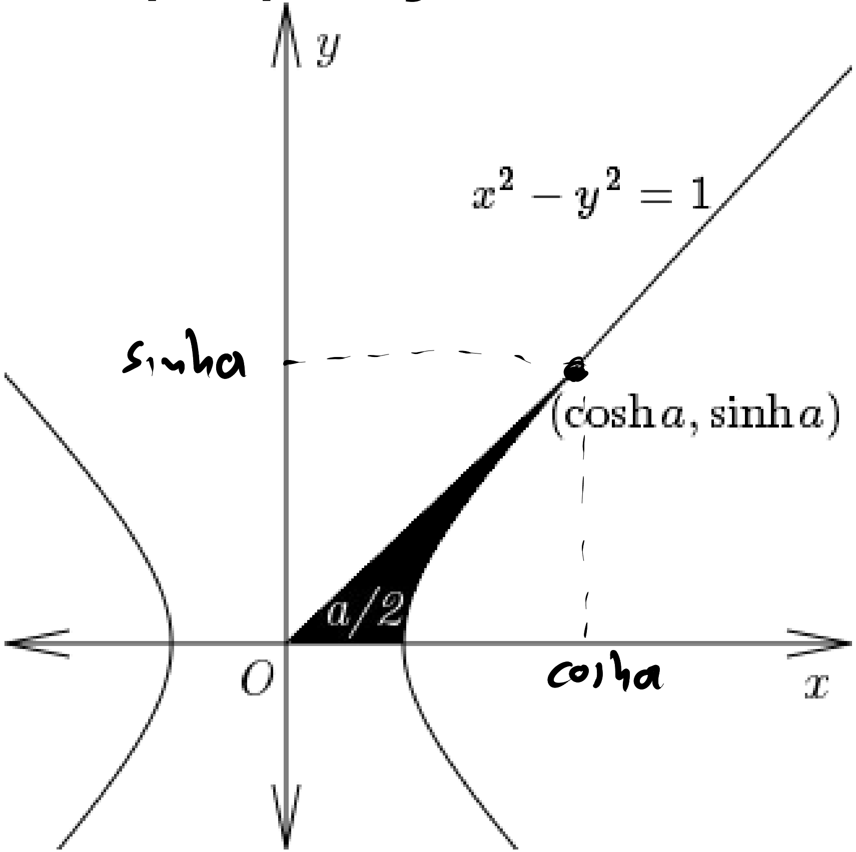
Υπερβολικές Συναρτήσεις

Η ονομασία “Υπερβολικές” οφείλεται στη στενή τους σχέση με την μοναδιαία υπερβολή.

Πιο συγκεκριμένα, οι αριθμοί cosh α, sinh α μπορούν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες των σημείων του δεξιού κλάδου της μοναδιαίας υπερβολής

$$x^2 – y^2 = 1,$$

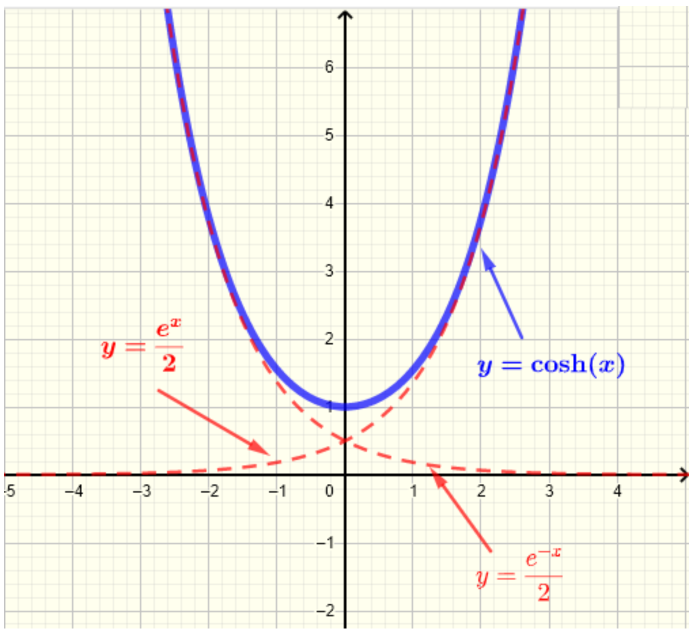
που αντιστοιχούν στη “επίκεντρη” γωνία α/2.

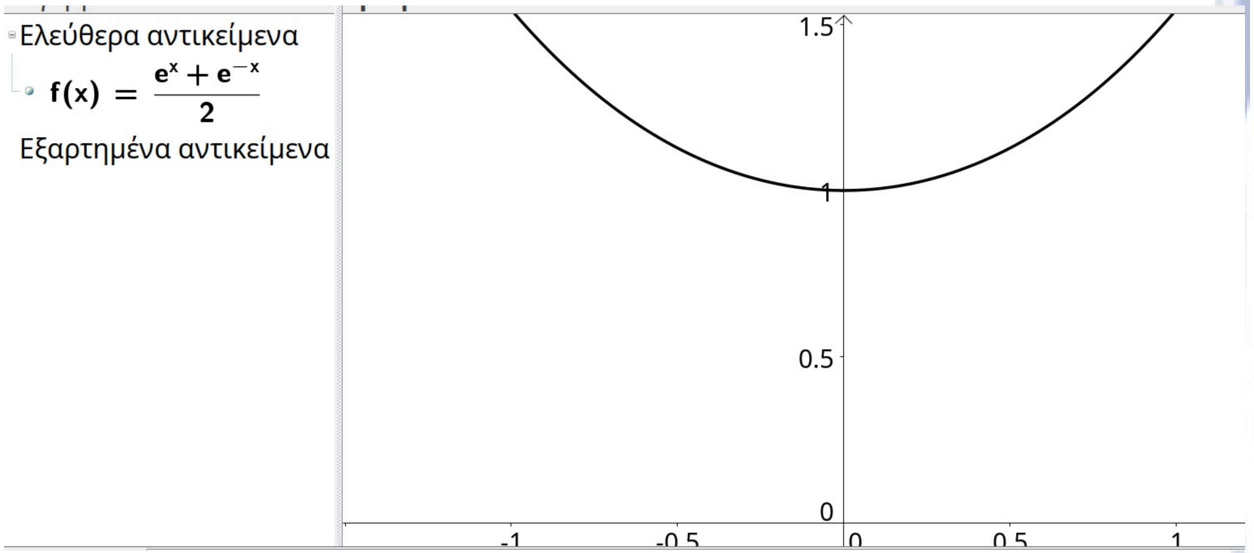


Πηγή διαγράμματος (και απόδειξη): http://tediousderivations.blogspot.com/2013/08/hyperbolic-functions.html
Χρήσιμος σύνδεσμος: https://math.stackexchange.com/a/455625/664787

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο (cosh), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.



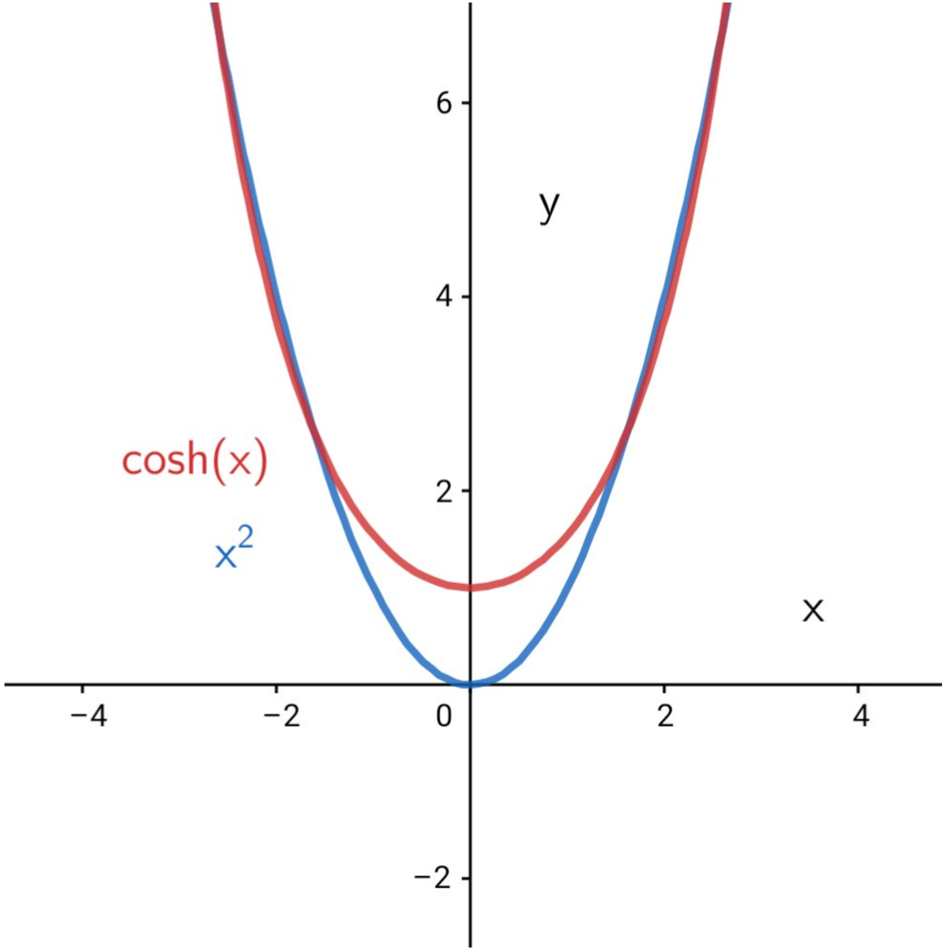


Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο (cosh), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

$\cosh(x) \neq x^2$



Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

- $\cosh x = \cosh(-x)$
- $\sinh x = -\sinh(-x)$
- $\tanh x = -\tanh(-x)$
- $\coth x = -\coth(-x)$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

- $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
- $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
- $\sinh^2 x = \dfrac{-1+\cosh(2x)}{2}$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh^2 x = \dfrac{1+\cosh(2x)}{2}$

Η ονομασία “Τριγωνομετρικές” οφείλεται στη ομοιότητα των σχέσεων που τις συνδέουν με αυτές που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι: $$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x),\quad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)},\quad \frac{d}{dx}\coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$(e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση sinh(x) = 2.

$$\sinh x = 2 \iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x - e^{-x} = 4 \overset{\cdot e^x}{\iff}$$

$$\iff e^{2x} - 4e^x - 1 = 0 \overset{y = e^x}{\iff} y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20, \quad y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Άρα, $e^x = 2 + \sqrt{5} \iff \boxed{x = \ln(2+\sqrt{5})}$.

ή $e^x = 2 - \sqrt{5}$: αδύνατη

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh(x) + \cosh(x) = 5$.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(0) = 0$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 4

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$$

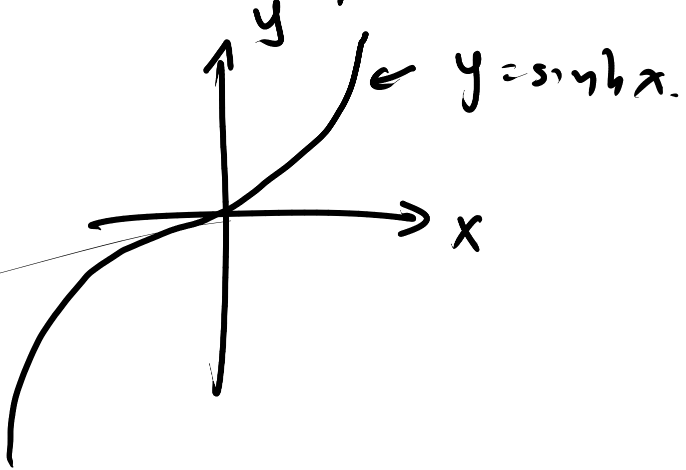
Να μελετηθεί η συνάρτηση f(x) = sinh(x)

Λύση

$$f'(x) = (\sinh(x))' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow \sinh \nearrow \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	



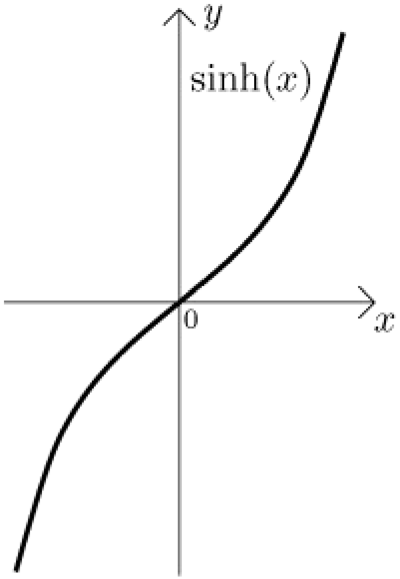
Υπερβολικές Συναρτήσεις

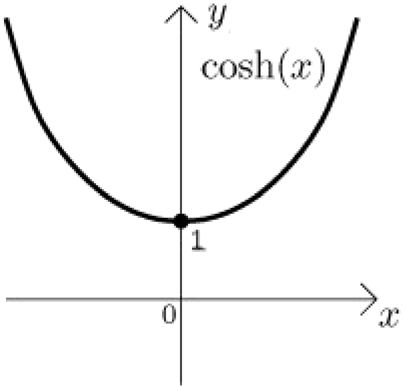
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

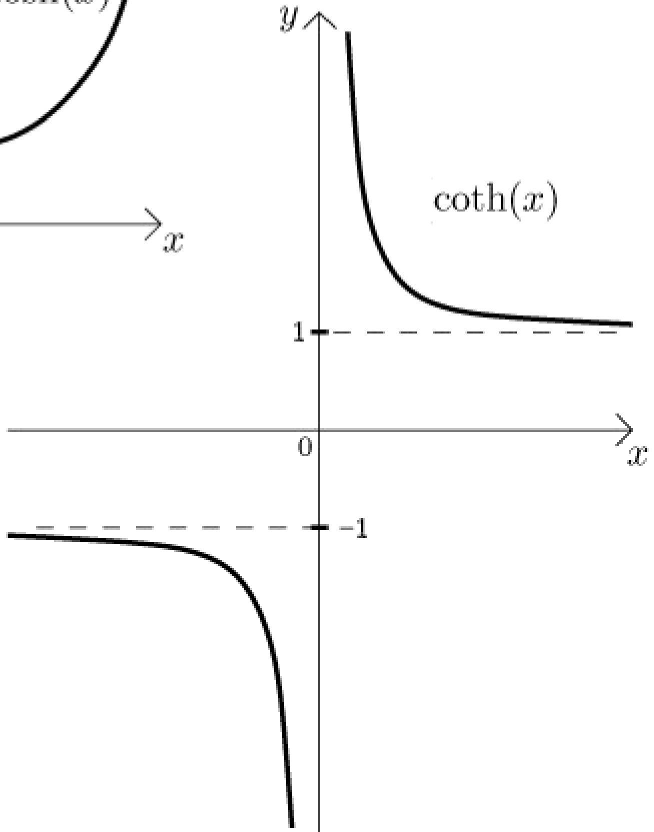
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

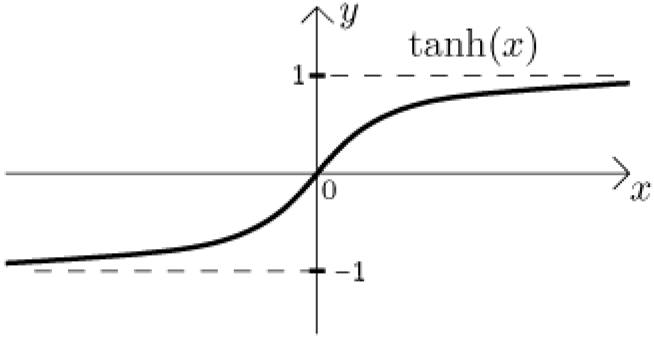
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$





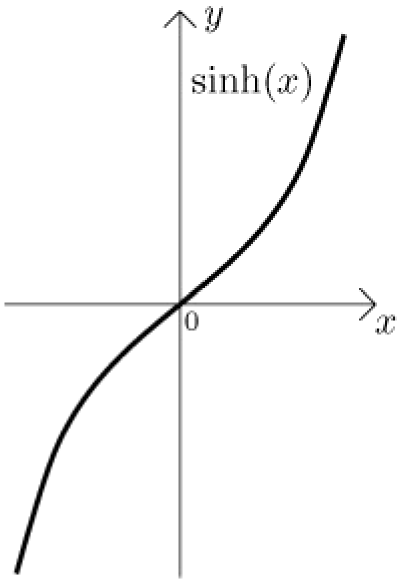


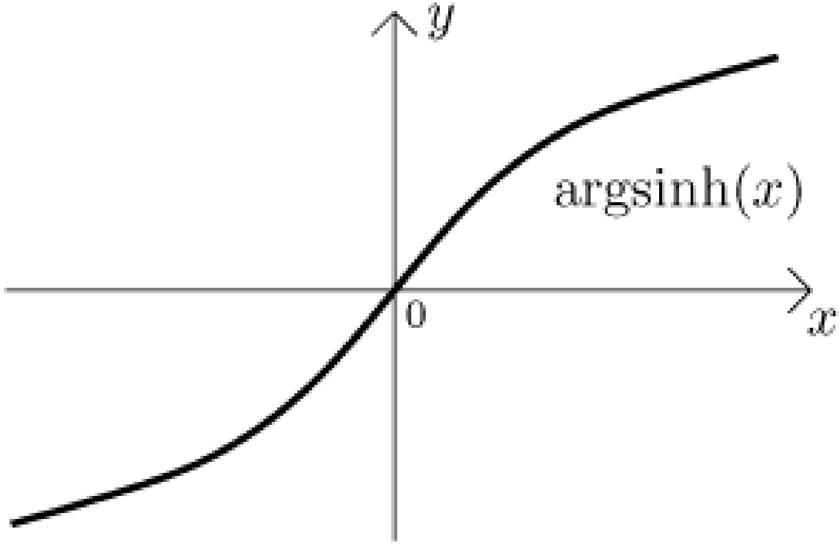


Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$





$$\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = y$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Άσκηση 5

Να δειχθεί ότι $\operatorname{argsinh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

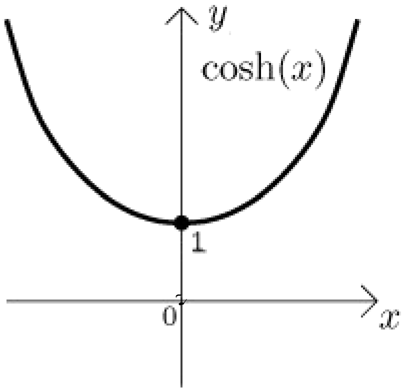
$$\Delta = (-2y)^2 - 4\cdot(-1) = 4 + 4y^2$$

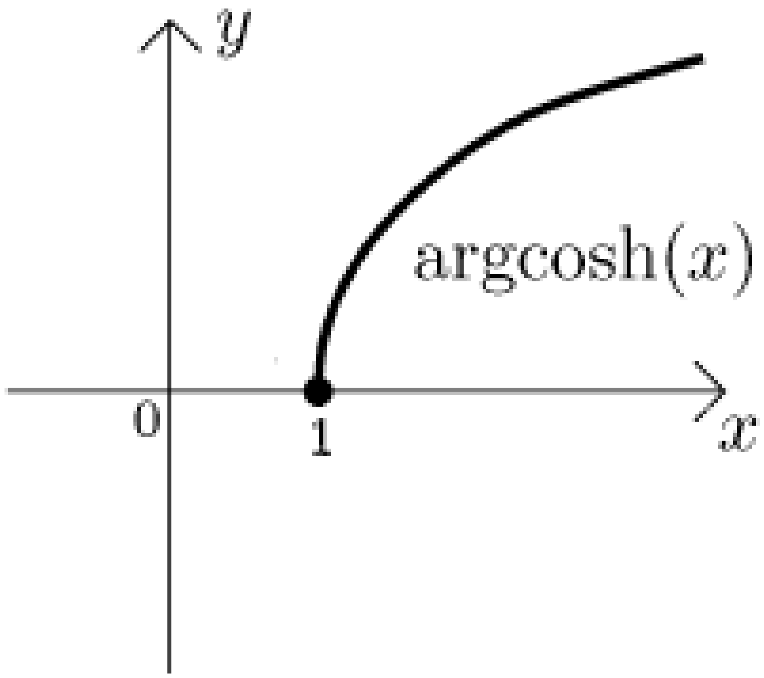
$$e^x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4+4y^2}}{2} = y \pm \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$





$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^{2} - 1}\right), \quad x \in [1, +\infty).$$

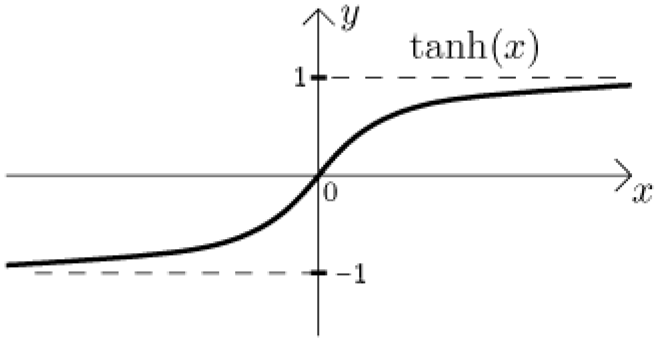
Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

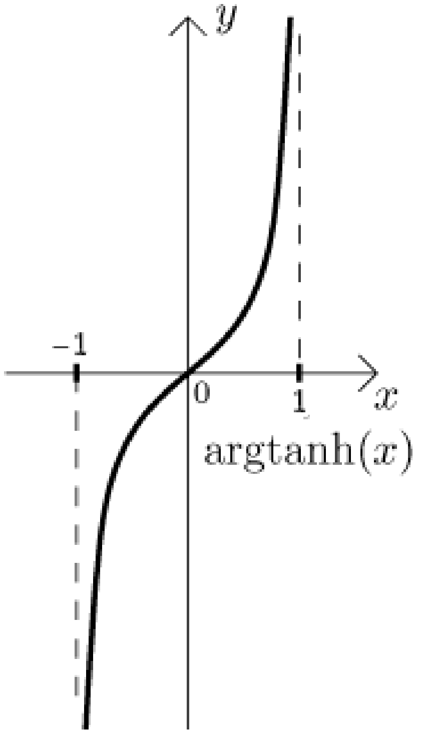
Άσκηση 6

Να δειχθεί ότι $\operatorname{argcosh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1, +\infty)$.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

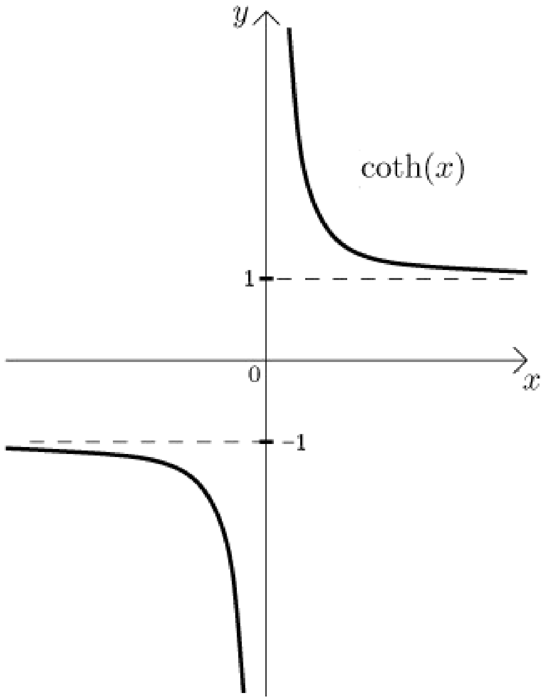


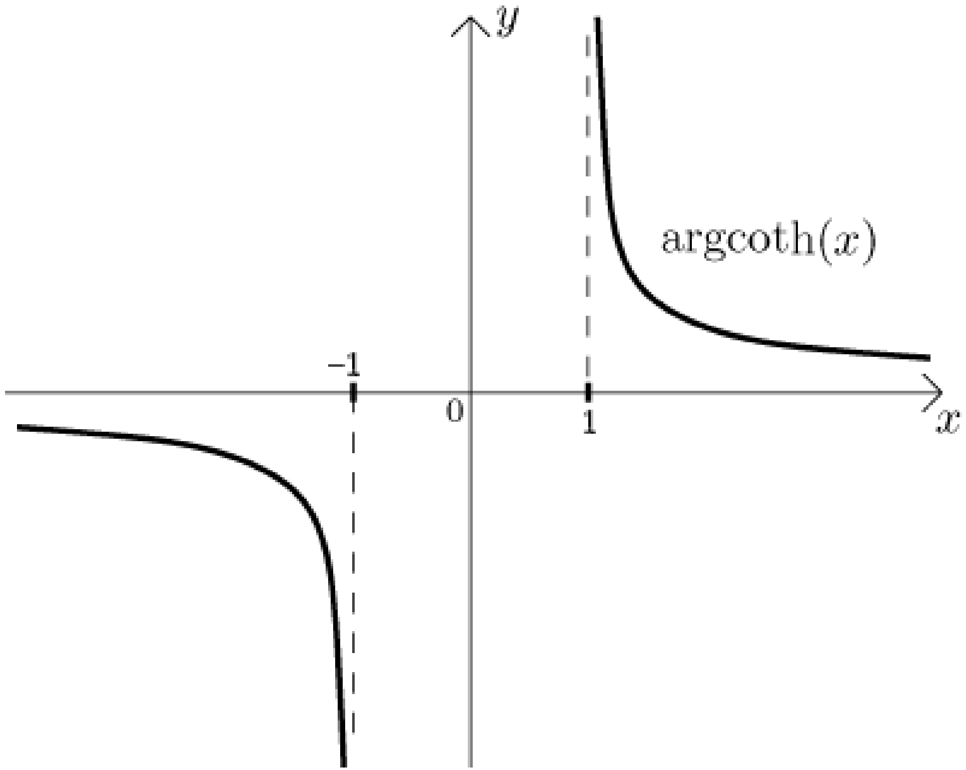


$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad x \in (-1,\, 1).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$





$$\operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

$argsnh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}$)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1.$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1.$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| > 1.$$