Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

https://utopia.duth.gr/epdiaman/files/logismos/integral1.pdf

Βασικές έννοιες

- Παράγουσα (ή αρχική συνάρτηση)
- Αόριστο ολοκλήρωμα
- Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
- Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός σχολικού βιβλίου Γ’ Λυκείου

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**[1] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ’ ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ**, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα εφ του x ντε x”. Δηλαδή,

$$\int f(x)dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

Σημείωση: Προσέξτε πως στο σχολικό βιβλίο της Γ’ Λυκείου, παράγουσα είναι **μία συνάρτηση** ενώ αόριστο ολοκλήρωμα είναι **ένα σύνολο**!

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός **Αόριστο ολοκλήρωμα** (ή παράγουσα) μιας συνάρτησης f λέγεται κάθε συνάρτηση g, τέτοια ώστε $g'(x) = f(x)$ και συμβολίζεται με

$$g(x) = \int f(x)dx$$

Ιδιότητες

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
2. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

$\frac{d}{dx}n=0$	$\int 0dx=C$
$\frac{d}{dx}x=1$	$\int 1dx=x+C$
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\int e^x=e^x+C$
$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$
$\frac{d}{dx}n^x=n^x\ln n$	$\int n^x dx=\frac{n^x}{\ln n}+C$
$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$	$\int \cos x dx=\sin x+C$
$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	$\int \sin x dx=-\cos x+C$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος:

$$\int f(x)\,dx = \text{σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της } f.$$

Στον ορισμό αυτό, το dx υπάρχει για να προσδιορίζει τη μεταβλητή ως προς την οποία πρέπει να γίνει η παραγώγιση για να προκύψει η f.

Η κατάδειξη της μεταβλητής είναι αχρείαστη στην περίπτωση όπου υπάρχει μόνο ένα σύμβολο μεταβλητής αλλά είναι απαραίτητη αν υπάρχουν περισσότερα:

$$\int \left(x^2 + y^2\right)dx \neq \int \left(x^2 + y^2\right)dy$$

$$\frac{x^3}{3} + y^2 \cdot x + c \qquad\qquad x^2 y + \frac{y^3}{3} + c$$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Το διαφορικό dx **αποκτά νόημα** ως μεμονωμένος συμβολισμός στον ορισμό της παραγώγου κατά Liebniz στα πλαίσια του λόγου dy/dx:

Αν y = f(x), τότε $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Με αφορμή τον παραπάνω ορισμό επιπλέον **ορίζεται**:

$$dy = f'(x)dx.$$

Παραδείγματα:

- $d(x^3) =$ $(x^3)'dx = 3x^2dx$
- $d(\ln x) =$ $(\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$
- $d(\sin x) =$ $(\sin x)'dx = \cos x\,dx$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Από τον ορισμό του διαφορικού μίας συνάρτησης df(x) και τις ιδιότητες της παραγώγου, άμεσα προκύπτει ότι για κάθε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g και α, β є R, είναι: $[a f(x) + \beta g(x)]' \cdot dx$

$$d(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg$$

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$$

Περαιτέρω, αν y = f(u) και u = u(x), τότε μπορούμε να γράψουμε

$$dy = d(f(u)) = f'(u)du = \frac{df}{du} \cdot du = \frac{df}{du} \cdot u'(x) \cdot dx = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Αν y = f(x), και $dy = f'(x)dx$, **αποκτούν νόημα** και τα παρακάτω διαφορικά:

$$d^2y = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2,$$

Η ίδια σχέση, αν εκφραστεί με το συμβολισμό της παραγώγισης κατά Liebniz, θα γραφεί:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Συνοψίζοντας:

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα διαφορικά ως εναλλακτικούς συμβολισμούς της παραγώγου όπου αυτό είναι δόκιμο.

$$F(x) = \int f(x)\,dx \implies F'(x) = f(x)$$

$$F(x(t)) = \int f(x(t))\,dx(t) \quad (\mathrm{I})$$

Πως προκύπτει ο ορισμός dx(t) = x’(t) dt

$$[F(x(t))]' = F'(x(t)) \cdot x'(t) = f(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$\int f(x(t)) \cdot x'(t)\,dt = F(x(t)) \quad (\mathrm{II})$$

$(\mathrm{I}), (\mathrm{II})$

$$dx(t) = x'(t)\,dt.$$

Πως προκύπτει ο ορισμός dx(t) = x’(t) dt

Έστω f: A → R και $F(x) = \int f(x)dx$. Η παράγουσα συνάρτηση F είναι μία συνάρτηση η οποία οφείλει να είναι παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο πεδίο ορισμού A της f και να ισχύει εκεί

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ή} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad x \in A.$$

Αν θέσουμε x = x(t) για κάποια κατάλληλη συνάρτηση x: B → A, τότε, η παράγουσα συνάρτηση εκφράζεται συναρτήσει της νέας μεταβλητής t ως εξής:

$$F(x(t)) = \int f(x(t))dx(t), \ t \in B,$$

και πρέπει να ισχύει $\dfrac{dF(x(t))}{dt} = f(x(t)), \ t \in B$. Το ερώτημα που προκύπτει είναι:

Πως αρμόζει να εκφραστεί το διαφορικό dx(t) ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\mathbf{\frac{dF(x(t))}{dt} = f(x(t)), \ t \in B;}$$

Πως προκύπτει ο ορισμός dx(t) = x’(t) dt

Πως αρμόζει να εκφραστεί το dx(t) ώστε να ισχύει $\mathbf{\dfrac{dF(x(t))}{dt} = f(x(t)),\ t \in B\,;}$

Η απάντηση δίνεται από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Είναι:

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dx(t)} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \cdot x'(t),\ t \in B,$$

Από τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος άμεσα προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει:

$$\int f(x(t)) \cdot x'(t)\, dt = F(x(t)),\ t \in B.$$

Από τη σύγκριση της παραπάνω σχέσης με την

$$\int f(x(t))dx(t) = F(x(t)),\ t \in B,$$

Προκύπτει ότι για το διαφορικό dx(t) που εμφανίζεται στο αόριστο ολοκλήρωμα, πρέπει να ισχύει

dx(t) = x’(t) dt.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0dx = c, \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$$

Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε

- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$$\int\left(x^3+\frac{1}{x}\right)dx = \int x^3dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + c.$$

$x \neq 0$.