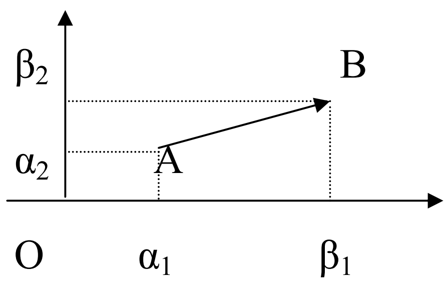
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- **Διάνυσμα**

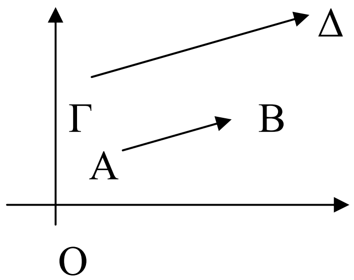
<u>Ορισμός 1.2</u> Το διατεταγμένο ζεύγος σημείων του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **προσανατολισμένο διάνυσμα του** $\mathbb{R}^2$ με αρχικό σημείο ή αρχή το $A(\alpha_1,\alpha_2)$ και τελικό σημείο ή πέρας το $B(\beta_1,\beta_2)$ και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ ή εναλλακτικά με $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ (ή $\overline{x}$ ή $\underline{x}$). Οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ τότε είναι οι $\beta_1 - a_1$ και $\beta_2 - a_2$.



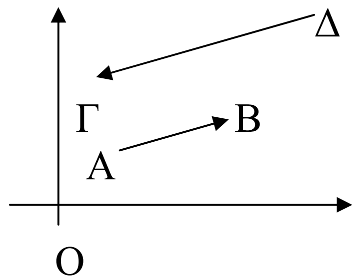
<u>Ορισμός</u> Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **παράλληλα**, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $c \neq 0$ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Αν c>0 τότε τα παράλληλα διανύσματα έχουν την ίδια φορά και καλούνται **ομόρροπα**.
Αν c<0 τότε τα παράλληλα διανύσματα έχουν αντίθετη φορά και καλούνται **αντίρροπα**.



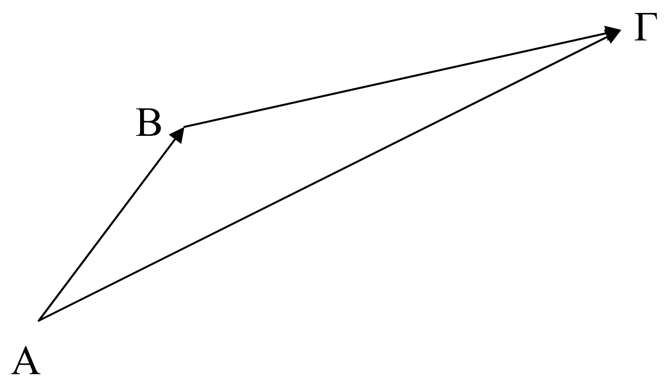
Ομόρροπα διανύσματα



Αντίρροπα διανύσματα

Ισχύει ότι

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}.$$

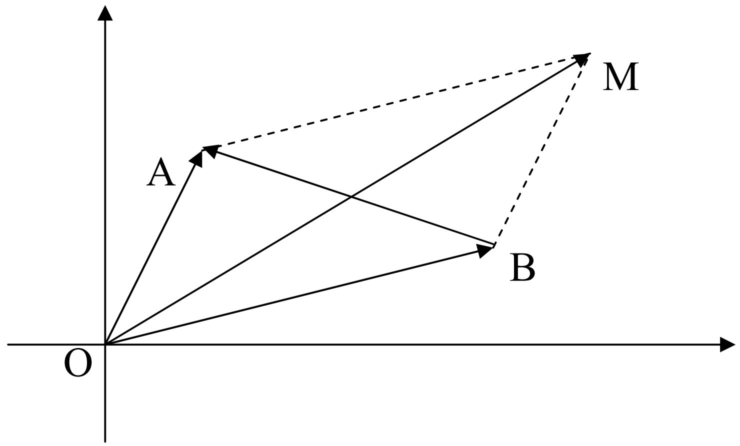


Επίσης ισχύουν

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$$

και

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$



• Εσωτερικό Γινόμενο

<u>Ορισμός</u> Έστω $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ δύο διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$. Τότε το **εσωτερικό γινόμενό** τους ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta}=a_1\beta_1+a_2\beta_2+...+a_n\beta_n .$$

<u>Ορισμός</u> **Μέτρο** ενός διανύσματος $\vec{a}$ ονομάζουμε τον αριθμό

$$\|\vec{a}\|=(\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2} .$$

<u>Ιδιότητες</u>

1) $\vec{a}\neq\vec{0}$ ανν $\|\vec{a}\|>0$.
2) $\vec{a}=\vec{0}$ ανν $\|\vec{a}\|=0$.
3) $\|c\vec{a}\|=|c|\|\vec{a}\|,\ \forall c\in\mathbb{R}$.
4) $\left\|\vec{a}+\vec{\beta}\right\|\leq\|\vec{a}\|+\left\|\vec{\beta}\right\|$ (τριγωνική ανισότητα).
5) $\left|\vec{a}\cdot\vec{\beta}\right|\leq\|\vec{a}\|\left\|\vec{\beta}\right\|$ (ανισότητα του Schwartz).
6) Αν $\vec{a}\perp\vec{b}$ τότε $\left\|\vec{a}+\vec{\beta}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2+\left\|\vec{\beta}\right\|^2$.

<u>Πρόταση</u> Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τότε

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{a}\|\|\vec{\beta}\|\cos\theta .$$

<u>Πρόταση</u> Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τότε

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{a}\|\|\vec{\beta}\|\cos\theta .$$

<u>Πόρισμα</u> Αν δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι ορθογώνια τότε $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0$.

• **Εξωτερικό γινόμενο**

<u>Ορισμός</u> Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{\beta} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3.$$

του $\mathbb{R}^3$. Ονομάζουμε τότε **εξωτερικό γινόμενο** των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ το διάνυσμα

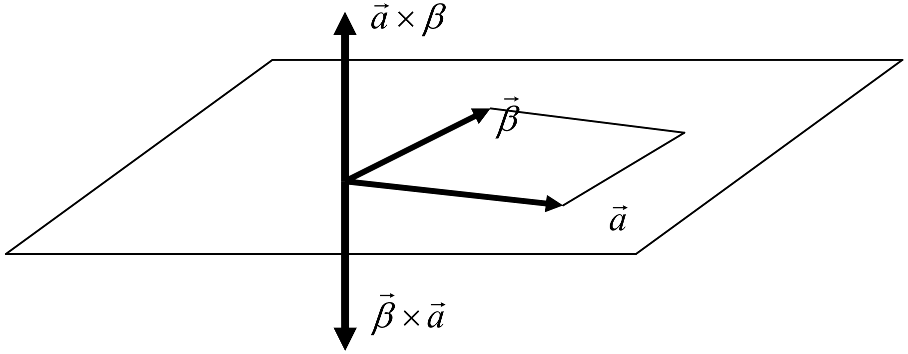
$$\vec{a} \times \vec{\beta} = (a_2\beta_3 - a_3\beta_2)\vec{i} + (a_3\beta_1 - a_1\beta_3)\vec{j} + (a_1\beta_2 - a_2\beta_1)\vec{k}\,.$$

<u>Σημείωση</u> Εναλλακτικά αντί του πιο πάνω ορισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο μνημονικός κανόνας:

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

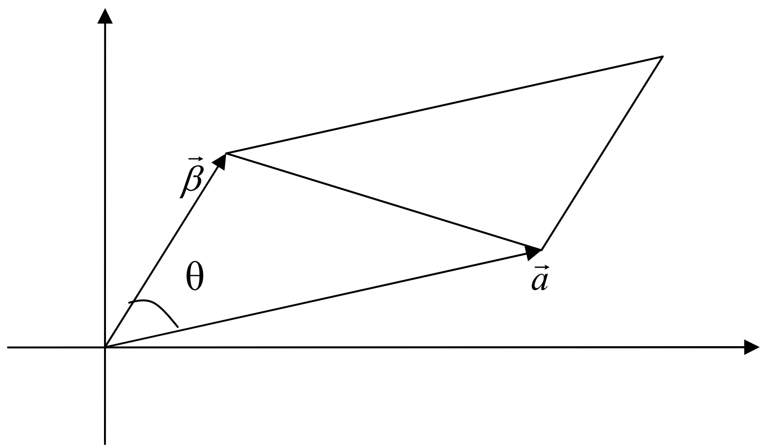
Ιδιότητες

1) $\vec{a}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{a}$.
2) $\vec{a}\times(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{a}\times\vec{\beta})+(\vec{a}\times\vec{\gamma})$.
3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{\beta}=\lambda(\vec{a}\times\vec{\beta})=\vec{a}\times(\lambda\vec{\beta})$.
4) $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{a}$.
5) $\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta}$.



Πρόταση Αν θ είναι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τότε

$$\left\|\vec{a}\times\vec{\beta}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\left|\sin\theta\right|.$$



Παρατήρηση Γεωμετρικά το $\left\|\vec{a}\times\vec{\beta}\right\|$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

Παρατήρηση Αν $\vec{a} = c\vec{\beta}$ τότε $\vec{a}\times\vec{\beta} = \vec{0}$.