ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω ο $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας A της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου $a_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$ πραγματικές σταθερές. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A την εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0,$$

όπου I ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας και $\lambda \in R$. Οι ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης καλούνται **χαρακτηριστικές τιμές** ή **ιδιοτιμές** του πίνακα A. Έστω λ_i μια ιδιοτιμή του A. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$$

που έχει λύση διάφορη της μηδενικής αφού $|A - \lambda I| = 0$. Κάθε λύση $\vec{x}$ του ομογενούς συστήματος καλείται **χαρακτηριστικό διάνυσμα** ή **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Πρόταση Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (A^T ο ανάστροφος του A).

Πρόταση Εάν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ιδιοτιμές του A και k πραγματική σταθερά τότε οι $k\lambda_1, k\lambda_2, ..., k\lambda_m$ είναι ιδιοτιμές του kA.

Ορισμός *Ένας πίνακας λέγεται* ***ορθογώνιος*** *εάν* $AA' = I$.

Πρόταση Εάν λ μια ιδιοτιμή ενός ορθογωνίου πίνακα A τότε και η $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A.

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πρόταση Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Η $i-$στήλη του πίνακα T είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Εφαρμογή Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα A^m, $m \in N$, όπου A ένας $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Πράγματι από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$B^m = (T^{-1}AT)^m = T^{-1}ATT^{-1}AT \ldots T^{-1}AT = T^{-1}A^mT.$$

Άρα

$$A^m = TB^mT^{-1}.$$

Είναι προφανές ότι

$$B^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$A^m = T\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}T^{-1}.$$