• Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε ένα σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, ..., x_n$ της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \mathbf{L\;L\;L\;L\;L\;L\;L\;L\;L\;L\;L\;L} & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

όπου $a_{ij,}\ b_i,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n$ σταθερές.

<u>Ορισμός</u> ***Λύση*** *του συστήματος θα ονομάζεται ένα σύνολο τιμών* $y_1, y_2, ..., y_n$ *οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις.*

<u>Ορισμός</u> *Όταν ένα σύστημα έχει τουλάχιστον μια λύση λέγεται* ***συμβιβαστό.*** *Διαφορετικά λέγεται* ***ασυμβίβαστο ή αδύνατο.***

<u>Ορισμός</u> *Ένα* ***συμβιβαστό*** *σύστημα είτε έχει μια λύση είτε έχει άπειρες λύσεις. Όταν έχει άπειρες λύσεις ονομάζεται* ***αόριστο****.*

Για να λύσουμε το παραπάνω σύστημα ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα των συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

τον $n \times 1$πίνακα των αγνώστων

$$\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n \right)',$$

και τον $m \times 1$πίνακα των σταθερών όρων

$$\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)'.$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Ι. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS-JORDAN

Εδώ θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(A|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & b_2 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_3 \end{array}\right).$$

Στη μέθοδο αυτή η επόμενη πρόταση είναι σημαντική.

<u>Πρόταση</u> Το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει λύση εάν και μόνον εάν

$$rank\,A = rank\left(A|\vec{b}\right).$$

Η εφαρμογή της μεθόδου Gauss-Jordan γίνεται αντιληπτή με τη βοήθεια των παρακάτω παραδειγμάτων

II. ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMMER

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται μόνο όταν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός (δηλαδή $m=n$).

Έστω A_i, $(i=1,2,...,n)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A όταν αντικαταστήσουμε την $i-$στήλη με τη στήλη των σταθερών όρων $\vec{b}$. Τότε:

α) Εάν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μοναδική λύση την $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

β) Εάν $|A|=0$ και τουλάχιστον μια από τις ορίζουσες $|A_i|$, $i=1,2,...,n$ είναι διάφορη από το μηδέν, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι αδύνατο.

γ) Εάν $|A|=0$ και $|A_i|=0$, $i=1,2,...,n$, τότε το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι αόριστο ή αδύνατο.

III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Στη μέθοδο αυτή θα πρέπει ο πίνακας A να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Τότε από τη σχέση $A\vec{x} = \vec{b}$ έχουμε $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.