ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2024 στο μάθημα:
"ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"

ΘΕΜΑ 1^o (2,5 μονάδες)
α) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$

(1,3μ)

β) Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $x(t) = e^t\cos t$, $y(t) = e^t\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

(1,2μ)

ΘΕΜΑ 2^o (2,5 μονάδες)
α) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{5^n}$

(1,3μ)

β) Να εκφραστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ ως αριθμητική απειροσειρά.

(1,2μ)

ΘΕΜΑ 3^o (3 μονάδες)
α) Να αναφέρετε τέσσερις ιδιότητες των οριζουσών.
β) Να αποδειχτεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a+b & \mathrm{b+c} & c+a \\ b+c & \mathrm{c}+\alpha & a+b \\ c+a & \alpha+\mathrm{b} & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} & c \\ b & \mathrm{c} & a \\ c & \mathrm{a} & b \end{vmatrix}.$$

γ) Να αποδειχτεί ότι τα

$$\vec{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta),$$

όπου $\theta \in (0,\pi)$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$.

ΘΕΜΑ 4^o (2 μονάδες)
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c\lim a_n,\ c\ \sigma\tau\alpha\theta.$ $\lim(a_n+\beta_n) = \lim a_n + \lim\beta_n$ $\lim(a_n\cdot\beta_n) = \lim a_n\cdot\lim\beta_n$ $\lim\frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim\beta_n},\ \lim\beta_n\neq 0$ $\lim a_n^{\ k} = (\lim a_n)^k$ $\lim\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n},\ \lim a_n\geq 0$ $\lim\lvert a_n\rvert = \lvert\lim a_n\rvert$	$\lim\left(c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0\right)=\lim\left(c_kn^k\right)$ $\lim\frac{c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0}{d_mn^m+d_{m-1}n^{m-1}+...+d_1n+d_0}=\frac{c_k}{d_m}\lim n^{k-m}$

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1+(n-1)d\right]=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(k-1)d\right]=\frac{\left[2a_1+(n-1)d\right]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}a_1\lambda^{n-1}=a_1\lambda^0+a_1\lambda^1+a_1\lambda^2+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_1\lambda^{k-1}=a_1\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Για τη *γεωμετρική* σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $\lvert\lambda\rvert<1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,
αν $\lvert\lambda\rvert\geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert=k$ ή $\lim\sqrt[n]{a_n}=k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ είναι $R=\frac{1}{k}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, ισχύει	Για $x\in(-1,1)$, ισχύει
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+...$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο (2,5 μονάδες)

(α) Θέτουμε x = 3sinht, άρα dx = 3cosht και 9 + x^2 = 9$\cosh^2$t.

Είναι$\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx = \int 3\, sinhtdt = 3cosht + c = 3cosh\left(argsinh\frac{x}{3}\right) + c = 3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}} + c, c \in \mathbb{R}$.

(β) Είναι $[x'(t)]^2 = e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t)$, $[y'(t)]^2 = e^{2t}(1 + 2\sin t \cos t)$ και $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 2e^{2t}$.
Άρα

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}(e^{\pi} - 1).$$

ΘΕΜΑ 2ο (2,5 μονάδες)

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1+2/5} + \frac{1}{1-3/5} = \frac{5}{7} + \frac{5}{2} = \frac{45}{14}$.

(β) Είναι $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$

και $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \ldots$

ΘΕΜΑ 3ο (3 μονάδες)

α) Οι ιδιότητες των οριζουσών είναι:

1) Μια ορίζουσα δεν αλλάζει εάν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές.
2) Μια ορίζουσα αλλάζει πρόσημο αν εναλλάξουμε τη θέση δύο γραμμών ή δύο στηλών.
3) Μια ορίζουσα είναι ίση με μηδέν αν τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών ή δύο στηλών είναι ίσα ή ανάλογα.
4) Εάν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης με κάποιο αριθμό $\lambda \neq 0$ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.
5) Μια ορίζουσα δεν μεταβάλλεται αν στα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιασμένα με κάποιο αριθμό $\lambda \neq 0$.
6) Εάν κάθε στοιχείο μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών.
7) Αν A, B είναι δύο $n \times n$ πίνακες τότε $|AB| = |A||B|$.
8) Η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

β) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα «*Εάν κάθε στοιχείο μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών*» έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ b & a & a \\ c & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & a \\ b & a & b \\ c & b & c \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} b & b & c \\ c & c & a \\ a & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c \\ c & a & a \\ a & b & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ c & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

γ) Όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακα A είναι ίσες με 0. Άρα η τάξη του A θα είναι γ) Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Τότε

$$\lambda_1(\cos\theta, \sin\theta) + \lambda_2(-\sin\theta, \cos\theta) = \vec{0}$$

ή

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta = 0 \\ \lambda_1 \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta = 0 \end{matrix}\right\}$$

ή

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \cos^2\theta - \lambda_2 \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \lambda_1 \sin^2\theta + \lambda_2 \sin\theta\cos\theta = 0 \end{matrix}\right\}$$

ή

$$\lambda_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0.$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = 0$ και κατά συνέπεια $\lambda_2 = 0$.

Άρα τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ 4^o (2 μονάδες)

α) $|A - \lambda I| = (1-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4) = 0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = 4$.

Για $\boxed{\lambda_1 = 0}$, $[A - \lambda_1 I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -3y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Για $\boxed{\lambda_2 = 4}$, $[A - \lambda_2 I]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

β) Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών διανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα T,

$$T = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$