ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Φεβρουαρίου 2024 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΘΕΜΑ 1$^{\text{O}}$ (2,5 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι $I = \int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c, c \in \mathbb{R}$. **(1,3μ)**

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ και $x = y^2$, είναι ίσο με 1/3. **(1,2μ)**

ΘΕΜΑ 2$^{\text{O}}$ (2,5 μονάδες)

(α) Να δείξετε ότι $\frac{5^n + 1}{4^n + 1} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. **(0,7μ)**

(β) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 1}{4^n + 1}$ **(0,8μ)**

(γ) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = x^2 e^{2x^4}$ **(1,0μ)**

ΘΕΜΑ 3$^{\text{O}}$ (3 μονάδες)

α) Πότε ένας πίνακας ονομάζεται *συμμετρικός* και πότε *αντισυμμετρικός*; Αναφέρετε ένα παράδειγμα συμμετρικού κι ένα παράδειγμα αντισυμμετρικού 2×2 πίνακα.
β) Έστω A συμμετρικός πίνακας $m \times m$ και P πίνακας $m \times n$. Να αποδειχτεί ότι ο πίνακας $B = P'AP$ είναι συμμετρικός. (Ο P' είναι ο ανάστροφος του P).
γ) Αν τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{x} - \vec{y}, \vec{y} - \vec{z}, \vec{z} + \lambda\vec{x}$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{O}}$ (2 μονάδες)

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c\lim a_n,\ c\ \sigma\tau\alpha\theta.$ $\lim(a_n+\beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n\cdot\beta_n) = \lim a_n \cdot \lim\beta_n$ $\lim\dfrac{a_n}{\beta_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim\beta_n},\ \lim\beta_n \neq 0$ $\lim a_n{}^k = (\lim a_n)^k$ $\lim\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n},\ \lim a_n \geq 0$ $\lim\lvert a_n\rvert = \lvert\lim a_n\rvert$	$\lim\left(c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0\right) = \lim\left(c_k n^k\right)$ $\lim\dfrac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1}+\ldots+c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1}n^{m-1}+\ldots+d_1 n + d_0} = \dfrac{c_k}{d_m}\lim n^{k-m}$

Αν $r = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim\sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim\sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1 + (n-1)d\right] = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 + (k-1)d\right] = \dfrac{\left[2a_1 + (n-1)d\right]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1\lambda^{n-1} = a_1\lambda^0 + a_1\lambda^1 + a_1\lambda^2 + \ldots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1\lambda^{k-1} = a_1\dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Για τη *γεωμετρική* σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $\lvert\lambda\rvert < 1$, συγκλίνει στο $\dfrac{1}{1-\lambda}$,
αν $\lvert\lambda\rvert \geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim\sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $r = \lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim\sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim\left\lvert\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = k$ ή $\lim\sqrt[n]{a_n} = k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι $R = \dfrac{1}{k}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x\in(-1,1)$, ισχύει $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{O}

(α) Είναι $I = \int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)(\sin x)' dx$

Με την αλλαγή μεταβλητής u = sin x, παίρνουμε:

$$I = \int (1 - u^2)\, du = u - \frac{1}{3}u^3 + c = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

(β) $E = \int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 2^{O}

(α) $\dfrac{5^n + 1}{4^n + 1} \geq \dfrac{5^n}{4^n + 4^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n.$

(β) Είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n + 1}{4^n + 1} \geq \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ και η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική με λόγο λ > 1, άρα αποκλίνει.

(γ) Είναι $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R},$ άρα $e^{2x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2x^4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!} x^{4n},$ και

$$f(x) = x^2 e^{2x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^{4n+2} = x^2 + 2x^6 + 2x^{10} + \dots,\ x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

α) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ συμμετρικός ανν $a_{ij}=a_{ji}$.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ αντισυμμετρικός ανν $a_{ij}=-a_{ji}$.

Συμμετρικός: $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$. Αντισυμμετρικός: $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

β) Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και P πίνακας $m\times n$. Τότε

$$B'=(P'AP)'=\left[(P'A)P\right]'=P'(P'A)'=P'A'(P')'=P'AP=B.$$

γ) Έστω

$$\lambda_1(\vec{x}-\vec{y})+\lambda_2(\vec{y}-\vec{z})+\lambda_3(\vec{z}+\lambda\vec{x})=\vec{0},$$

Τότε

$$(\lambda_1+\lambda\lambda_3)\vec{x}+(-\lambda_1+\lambda_2)\vec{y}+(-\lambda_2+\lambda_3)\vec{z}=\vec{0}.$$

Όμως τα $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\lambda_1+\lambda\lambda_1=0\\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_1(1+\lambda)=0,$$

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{x}-\vec{y},\ \vec{y}-\vec{z},\ \vec{z}+\lambda\vec{x}$ γραμμικώς εξαρτημένα πρέπει $\lambda_1\neq 0$. Άρα $\lambda=-1$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

α) $\left|A-\lambda I\right|=(5-\lambda)(4-\lambda)-2=20-9\lambda+\lambda^2-2=\lambda^2-9\lambda+18=(\lambda-3)(\lambda-6)=0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=3$ και $\lambda_2=6$.

Για $\boxed{\lambda_1=3}$, $\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}2x+y=0\\ 2x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=-2x$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\overline{x}_1=\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}'$.

Για $\boxed{\lambda_2=6}$, $\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}-x+y=0\\ 2x-2y=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=x$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\overline{x}_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$.

β) Με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα $T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφό του $T^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$T^{-1}AT=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$