ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2023 στο μάθημα:
"ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$ (2,5 μονάδες)
α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x - x^2$ και τον άξονα x'x στο διάστημα [0, 4].

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$ (2,5 μονάδες)
α) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n}$$

β) Να δείξετε ότι το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης coshx είναι

$$coshx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$ (3 μονάδες)
α) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (2,1,0)$ και $\vec{v}_2 = (2,3,0)$. (i) Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (ii) Να προσδιοριστεί ο χώρος που παράγουν. (iii) Αποτελούν βάση κάποιου χώρου και αν ναι ποιου; (iv) Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{v}_3$ τέτοιο ώστε τα τρία πλέον διανύσματα να αποτελούν μία βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

β Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$ (2 μονάδες)
Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c\lim a_n,\ c\ \sigma\tau\alpha\theta.$ $\lim(a_n+\beta_n) = \lim a_n + \lim\beta_n$ $\lim(a_n\cdot\beta_n) = \lim a_n\cdot\lim\beta_n$ $\lim\dfrac{a_n}{\beta_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim\beta_n},\ \lim\beta_n\neq 0$ $\lim a_n{}^k = (\lim a_n)^k$ $\lim\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n},\ \lim a_n\geq 0$ $\lim\lvert a_n\rvert = \lvert\lim a_n\rvert$	$\lim\left(c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0\right)=\lim\left(c_kn^k\right)$ $\lim\dfrac{c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0}{d_mn^m+d_{m-1}n^{m-1}+...+d_1n+d_0}=\dfrac{c_k}{d_m}\lim n^{k-m}$

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1+(n-1)d\right]=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(k-1)d\right]=\dfrac{\left[2a_1+(n-1)d\right]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}a_1\lambda^{n-1}=a_1\lambda^0+a_1\lambda^1+a_1\lambda^2+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_1\lambda^{k-1}=a_1\dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Για τη *γεωμετρική* σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $\lvert\lambda\rvert<1$, συγκλίνει στο $\dfrac{1}{1-\lambda}$,
αν $\lvert\lambda\rvert\geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim\left\lvert\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert=k$ ή $\lim\sqrt[n]{a_n}=k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ είναι $R=\dfrac{1}{k}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x\in(-1,1)$, ισχύει $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-...=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+...$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{O}}$

(α) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = lim_{\varepsilon\to o^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = lim_{\varepsilon\to o^+} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/2} dx =$
$- lim_{\varepsilon\to o^+} \left[2(1-x)^{1/2}\right]_0^{1-\varepsilon} = 2.$

(β) $E = \pi \int_0^4 f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\, dx = \frac{512\pi}{15} \tau.\mu.$

ΘΕΜΑ 2$^{\text{O}}$

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-2/5} + \frac{1}{1+1/5} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} = \frac{15}{6}.$

(β)
$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{O}}$

α) (i) Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Τότε

$$\lambda_1(2,1,0) + \lambda_2(2,3,0) = (0,0,0) \text{ ή } \begin{cases} 2\lambda_1 & +\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \end{cases} \text{ ή } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

(ii) Είναι ο χώρος της μορφής $V = \{(a_1, a_2, 0) \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Ναι, αποτελούν βάση για το χώρο *V*.

(iv) $(0,0,1)$.

β) Αφαιρούμε την 1$^{\eta}$ γραμμή από τις υπόλοιπες και έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (-x)(1-x)(2-x)(3-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

α) $\left|A-\lambda I\right| = (5-\lambda)(7-\lambda)-8 = 35-12\lambda+\lambda^2-8 = \lambda^2-12\lambda+27 = (\lambda-3)(\lambda-9) = 0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 9$.

Για $\boxed{\lambda_1 = 3}$, $\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+8y=0 \\ x+4y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -4y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\overline{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}'$.

Για $\boxed{\lambda_2 = 9}$, $\left[A-\lambda_2 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4x+8y=0 \\ x-2y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\overline{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}'$.

β) Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών διανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα T,

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$