ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Φεβρουαρίου 2023 στο μάθημα:
"ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ"

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$ (3 μονάδες)
α) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx$.
β) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $x'x$, της $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$ (2 μονάδες)
α) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+1}$.
β) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $\cosh x$.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$ (3 μονάδες)
α) Να αναφερθούν τρεις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.
β) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ αν

$$2(\vec{a} - \vec{\gamma}) - \vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{a}) .$$

γ) Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} a-\beta-\gamma & 2\alpha & 2a \\ 2\beta & \beta-\gamma-a & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-a-\beta \end{vmatrix}$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$ (2 μονάδες)
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A.
β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$$\begin{array}{rcl} \lim(ca_n) & = & c\lim a_n,\ \ c\ \sigma\tau\alpha\theta. \\ \lim(a_n+\beta_n) & = & \lim a_n + \lim\beta_n \\ \lim(a_n\cdot\beta_n) & = & \lim a_n\cdot\lim\beta_n \\ \lim\dfrac{a_n}{\beta_n} & = & \dfrac{\lim a_n}{\lim\beta_n},\ \ \lim\beta_n\neq 0 \\ \lim a_n^{\ k} & = & (\lim a_n)^k \\ \lim\sqrt[k]{a_n} & = & \sqrt[k]{\lim a_n},\ \ \lim a_n\geq 0 \\ \lim\lvert a_n\rvert & = & \lvert\lim a_n\rvert \end{array}$$	$$\lim\left(c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0\right)=\lim\left(c_kn^k\right)$$ $$\lim\frac{c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+...+c_1n+c_0}{d_mn^m+d_{m-1}n^{m-1}+...+d_1n+d_0}=\frac{c_k}{d_m}\lim n^{k-m}$$

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1+(n-1)d\right]=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(k-1)d\right]=\dfrac{\left[2a_1+(n-1)d\right]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}a_1\lambda^{n-1}=a_1\lambda^0+a_1\lambda^1+a_1\lambda^2+...$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_1\lambda^{k-1}=a_1\dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Για τη *γεωμετρική* σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $\lvert\lambda\rvert<1$, συγκλίνει στο $\dfrac{1}{1-\lambda}$,

αν $\lvert\lambda\rvert\geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Αν $r=\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim\left\lvert\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert=k$ ή $\lim\sqrt[n]{a_n}=k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ είναι $R=\dfrac{1}{k}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, ισχύει	Για $x\in(-1,1)$, ισχύει
$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$	$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$
$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-...=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$
$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+...$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{o}

α) Είναι

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}dx = \lim_{m\to+\infty}\int_0^{m} x\,e^{-x}dx$$

και

$\int_0^m x\,e^{-x}dx = \int_0^m x\,(-e^{-x})'dx = x(-e^{-x})|_0^m + \int_0^m e^{-x}\,dx = x(-e^{-x})|_0^m + (-e^{-x})|_0^m = -me^{-m} - e^{-m} + 1.$

Τελικά, υπολογίζουμε

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}dx = \lim_{m\to+\infty}(-me^{-m} - e^{-m} + 1) = 1.$$

β)

$$E = \int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}dx = \frac{\pi}{18}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\tau.\mu.$$

Σημείωση: εφαρμόστηκε η αντικατάσταση $t = 1 + 9x^4$.

ΘΕΜΑ 2^{o}

α)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2n+1} < \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \simeq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{m\to+\infty}\int_1^{m}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{m\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^m$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\left(-\frac{1}{m}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 < +\infty,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

β)

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

ΘΕΜΑ 3^{O}

α) Ιδιότητες

1) $\vec{a}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{a}$.

2) $\vec{a}\times(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{a}\times\vec{\beta})+(\vec{a}\times\vec{\gamma})$.

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{\beta}=\lambda(\vec{a}\times\vec{\beta})=\vec{a}\times(\lambda\vec{\beta})$.

4) $(\vec{a}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{\beta}-(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\vec{a}$.

5) $\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta}$.

β) Έχουμε

$$2(\vec{a}-\vec{\gamma})-\vec{x}=\frac{1}{4}(\vec{x}+\vec{\beta})-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})$$

ή

$$2\vec{a}-2\vec{\gamma}-\vec{x}=\frac{1}{4}\vec{x}+\frac{1}{4}\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{a}$$

ή

$$-\vec{x}-\frac{1}{4}\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

ή

$$\left(-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\vec{x}=\left(\frac{1}{2}-2\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

ή

$$\left(-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\vec{x}=\left(\frac{1}{2}-2\right)\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

ή

$$-\frac{3}{4}\vec{x}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$$

ή

$$\vec{x}=-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\right)$$

και επομένως

$$\vec{x}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{\beta}-\frac{8}{3}\vec{\gamma}\,.$$

γ) Προσθέτουμε την 1^{η} γραμμή στις επόμενες και έτσι προκύπτει η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a-\beta-\gamma & 2\alpha & 2a \\ 2\beta & \beta-\gamma-a & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-a-\beta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+\beta+\gamma & a+\beta+\gamma & a+\beta+\gamma \\ 2\beta & \beta-\gamma-a & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-a-\beta \end{vmatrix}=$$

$$(a+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-a & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-a-\beta \end{vmatrix}=(a+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\beta & -(\beta+\gamma+a) & 0 \\ 2\gamma & 0 & -(\beta+\gamma+a) \end{vmatrix}=$$

$(a+\beta+\gamma)^3$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

α) $|A-\lambda I| = (8-\lambda)(2-\lambda)+5 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 7$ και $\lambda_2 = 3$.

Για $\boxed{\lambda_1 = 7}$, $\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ 5x-5y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Για $\boxed{\lambda_1 = 3}$, $\left[A-\lambda_1 I\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x-y=0 \\ 5x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x = y$.

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}^T$.

β) Με τη βοήθεια των χαρακτηριστικών διανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα T,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/4 & -7/4 \\ -3/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$