Κεφάλαιο I

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων είναι απαραίτητη στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά γιατί πολλά φαινόμενα στην φύση και συστήματα στην τεχνική περιγράφονται από μαθηματικά μοντέλα μιγαδικών μεταβλητών. Εξάλλου η θεμελίωση των επόμενων κεφαλαίων των Μετασχηματισμών Fourier και Μετασχηματισμών Laplace βασίζεται στη θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων.

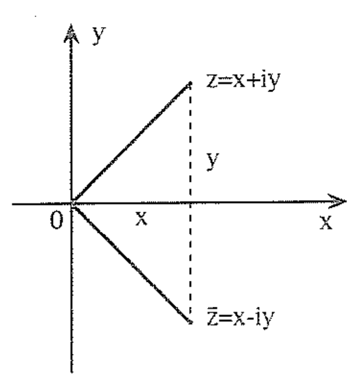
Θα θεωρήσουμε γνωστή τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών και θα αναφέρουμε στη συνέχεια μόνο μερικές βασικές ιδιότητές τους.

Είναι γνωστό ότι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{R}^2$ των διατεταγμένων δυάδων πραγματικών αριθμών. Εξαιτίας αυτής της ισομορφίας το αντίστοιχο επίπεδο Oxy λέγεται **μιγαδικό επίπεδο** και συμβολίζεται επίσης με $\mathbb{C}$.

2. Μιγαδικοί αριθμοί

Έστω $z = x+iy$ μιγαδικός αριθμός, όπου $x=\text{Re } z$, $y=\text{Im } z$ το **πραγματικό και φανταστικό μέρος** του z αντιστοίχως (Σχ. 1). Η γραφή αυτή λέγεται **αναλυτική παράσταση** του μιγαδικού αριθμού z. **Μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z είναι ο μη αρνητικός αριθμός $\sqrt{x^2+y^2}$ και παριστάνεται με $|z|$. **Συζυγής** του $z = x+iy$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $x-iy$ και παριστάνεται με $\bar{z}$. Ισχύει:

$z=\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $z=-\bar{z} \Leftrightarrow z$ φανταστικός αριθμός.



Σχ. 1

Από τις σχέσεις $z=x+iy$ και $\bar{z}=x-iy$ προκύπτει ότι

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \tag{1}$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}), \tag{2}$$

$$z\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2 \tag{3}$$

Αν $z, w \in \mathbb{C}$ τότε

(α) $$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = \operatorname{Re}(\bar{z}w) \tag{4}$$

(β) $$|z\pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\cdot\bar{w}) + |w|^2 \tag{5}$$

α) Πράγματι, έχουμε $\overline{\bar{z}w} = z\bar{w}$, δηλαδή οι $\bar{z}w$ και $z\bar{w}$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί και συνεπώς έχουν ίσα πραγματικά μέρη.

β) $$|z\pm w|^2 = (z\pm w)\,(\overline{z\pm w}) = (z\pm w)\,(\bar{z}\pm\bar{w}) = z\bar{z}\pm(z\bar{w}+\bar{z}w)+w\bar{w} =$$
$$= |z|^2\pm(z\bar{w}+\bar{z}w)+|w|^2 = |z|^2\pm 2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|w|^2,$$

σύμφωνα με την (α).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχτεί ότι

$$|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3) έχουμε

$$\begin{aligned}
|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 &= (1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\
&= 1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 - z_2\bar{z}_2\\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).
\end{aligned}$$

Στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν η τριγωνική ανισότητα

$$\big|\,|z|-|w|\,\big| \le |z\pm w| \le |z|+|w|$$

και η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 \le (|z_1|^2+|z_2|^2)(|w_1|^2+|w_2|^2).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha>0$ να δειχθεί ότι

$$|z_1+z_2|^2 \le (1+\alpha)\,|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|z_2|^2.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον τύπο (5), αν

$$|z_1+z_2|^2 \leq (1+\alpha)\ |z_1|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|z_2|^2 .$$

αρκεί να δειχθεί ότι

$$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq \alpha\,|z_1|^2+\frac{1}{\alpha}\,|z_2|^2$$

Ή, αν $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$,

$$2(x_1x_2+y_1y_2) \leq \alpha(x_1^2+y_1^2)+\frac{1}{\alpha}(x_2^2+y_2^2)$$

ή

$$\left(\sqrt{\alpha}\,x_1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x_2\right)^2+\left(\sqrt{\alpha}\,y_1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,y_2\right)^2 \geq 0 ,$$

που ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν $|z|=1$ ή $|w|=1$ να δειχθεί ότι $\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w} = 1.$

Απόδειξη. Αφού $|z|=1$, έπεται ότι $|z\bar{z}|=1$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|^2 = 1$ ή $\dfrac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2} = 1.$
Οπότε

$$\frac{|z-w|^2}{|1-\bar{z}w|^2} = \frac{(z-w)\,(\overline{z-w})}{(1-\bar{z}w)\,(\overline{1-\bar{z}w})} = \frac{(z-w)\,(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{z}w)\,(1-z\bar{w})} = \frac{z\bar{z}-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}}{1-z\bar{w}-\bar{z}w+z\bar{z}w\bar{w}}$$

$$= \frac{1-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}}{1-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}} = 1$$

αφού $\bar{\bar{z}}=z$. Ομοίως εργαζόμαστε αν $|w|=1$.

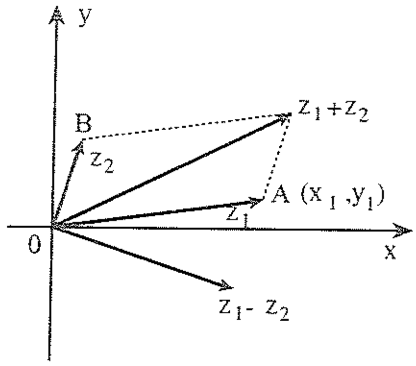
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Αν $|z|=1$ να δειχθεί ότι $\left|\dfrac{\alpha z+b}{\bar{b}z+\bar{\alpha}}\right| = 1$, όπου $\alpha, b \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Αφού $|z|=1$, έχουμε $z\bar{z}=1$. Συνεπώς,

$$\left|\frac{\alpha z+b}{\bar{b}z+\bar{\alpha}}\right| = \frac{|\alpha z+b|}{|\bar{b}+\bar{\alpha}\bar{z}|\ |z|} = \frac{|\alpha z+b|}{|\overline{\alpha z+b}|} = \frac{|\alpha z+b|}{|\alpha z+b|} = 1 .$$

Πολλές φορές ένας μιγαδικός αριθμός $z_1 = x_1 + iy_1$ παριστάνεται ως



Σχ. 2

ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, οπότε το άθροισμα και η διαφορά των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 στην πραγματικότητα βρίσκεται με το γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου των αντίστοιχων διανυσμάτων τους. (Σχ. 2). Αν δε z_1 και z_2 είναι δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου, τότε, ομοίως όπως στα διανύσματα, **το μέτρο** $|z_1 - z_2|$ **δίνει την απόσταση αυτών.**

Ένα μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ μπορούμε να τον παραστήσουμε υπό **τριγωνομετρική μορφή** ή **πολική μορφή** αν θεωρήσουμε τη γωνία θ μεταξύ του άξονα Ox και της ευθείας που ενώνει την αρχή των αξόνων με το μιγαδικό αριμό z (Σχ. 3). Τότε

$$x = |z|\cos\theta\,, \quad y = |z|\sin\theta$$

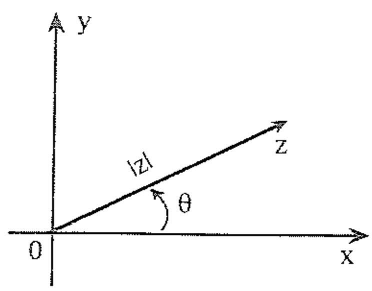
οπότε

$$z = x+iy = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|\text{cis}\theta\,.$$

Η γωνία θ λέγεται **όρισμα** του z, συμβολίζεται $\arg z$ και μεταβάλλεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Την παράσταση $\cos\theta + i\,\sin\theta$ συνήθως την γράφουμε συνοπτικά $\text{cis}\theta$.

Το όρισμα θ του μιγαδικού αριθμού $z = x+iy$ βρίσκεται, ως γνωστό, από τις σχέσεις

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|}, \quad \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$



Σχ. 3

Προφανώς δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα μέτρα και αντίθετα ορίσματα.

Η τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών απλουστεύει τις πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης αυτών. Πράγματι, αν $z_1 = |z_1|\text{cis}\theta_1$ και $z_2 = |z_2|\text{cis}\theta_2$, τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_2)\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) \\ &= |z_1|\,|z_2|\,[(\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\,\cos\theta_2 + \sin\theta_2\,\cos\theta_1)] \\ &= |z_1|\,|z_2|\,\text{cis}(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

ή

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,\text{cis}(\theta_1+\theta_2)\,.$$

Δηλαδή **το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων τους και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων τους.** Ο τύπος αυτός, προφανώς ισχύει και για το γινόμενο περισσοτέρων των δύο μιγαδικών αριθμών.

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$.

Λύση. Θέτουμε πρώτα τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $1+i\sqrt{3}$ και $1-i\sqrt{3}$ σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε,

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2,\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\pi<\theta\leq\pi\ ,$$

οπότε $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Άρα

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10} = \left(\frac{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^{10} = \frac{\operatorname{cis}\frac{10\pi}{3}}{\operatorname{cis}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}}{\operatorname{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= \operatorname{cis}\frac{8\pi}{3} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Στους μιγαδικούς αριθμούς οι ρίζες και οι δυνάμεις ορίζονται διαφορετικά από ότι στους πραγματικούς αριθμούς. Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}-\{1\}$. Κάθε μιγαδικός αριθμός w, τέτοιος ώστε $w^n=z$ λέγεται **n-οστή ρίζα του** z και παριστάνεται με $z^{1/n}$. Δηλαδή,

$$z^{/n} = w \Leftrightarrow w^n = z\ .$$

Αν $z\in\mathbb{R}^+$, είναι γνωστό ότι υπάρχει ένας μόνο πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $x^n=z$. Στην περίπτωση αυτή συνηθίζεται ο μοναδικός αυτός μη αρνητικός αριθμός x να γράφεται $\sqrt[n]{z}$. Αποδεικνύεται, όμως, γενικά, ότι στους μιγαδικούς αριθμούς **κάθε μιγαδικός αριθμός** z **με μέτρο** $|z|$ **και όρισμα** θ **έχει** n **n-οστές ρίζες** που δίνονται από τον τύπο

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Ειδικώς, αν $z=1$, επειδή $|z|=1$ και $\arg z=0$, από τον τύπο αυτό βρίσκουμε τις **n-οστές ρίζες της μονάδας** που είναι οι

$$w_0 = 1, \;\; w_1 = \cos\frac{2\pi}{n}, \;\; w_2 = \frac{4\pi}{n}, \;\; \ldots, \;\; w_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

ή αν θέσουμε $w_1=\omega$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι αριθμοί

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1} .$$

Οι ρίζες αυτές είναι τοποθετημένες ανά ίσα τόξα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο αρχίζοντας από το σημείο $z=1$ του μιγαδικού επιπέδου C.

Έστω $z \in \mathbb{C}-\{0\}$ με μέτρο $|z|$ και $\arg z=\theta$. Τότε, ο **λογάριθμος** του μιγαδικού αριθμού z ορίζεται από τη σχέση

$$\log z = \log|z| + i(\theta+2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Δηλαδή κάθε μιγαδικός αριθμός z έχει άπειρο πλήθος λογαρίθμων. Αν $k=0$, τότε ο $\log z=\log|z|+i\theta$ λέγεται **πρωτεύουσα τιμή** του λογαρίθμου του z.

Ομοίως, τώρα, μπορούμε να ορίσουμε τις δυνάμεις z^α, $(z, \alpha \in \mathbb{C})$ των μιγαδικών αριθμών. Έστω $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, τότε η **δύναμη** z^α με βάση z και εκθέτη α ορίζεται από τον τύπο

$$z^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{όταν } z=0 \text{ και } \alpha\neq 0 \\ e^{\alpha\log z} = e^{\alpha[\log|z|+i(\theta+2k\pi)]}, & z\neq 0, \; k \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι **υπάρχουν άπειρες τιμές για τη δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού όταν ο εκθέτης α της δύναμης είναι διάφορος ρητού αριθμού**, σε αντίθεση από ότι δεχόμαστε για τις δυνάμεις πραγματικών που όταν είναι θετικοί έχουν πάντα μία δύναμη. Όταν $\alpha=n \in \mathbb{N}$, τότε η δύναμη z^n είναι μονότιμα ορισμένη, ενώ όταν n ρητός $\neq$ ακεραίου η δύναμη z^n έχει πεπερασμένου πλήθους τιμές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να υπολογιστεί η δύναμη $1^{\sqrt{3}}$ στους μιγαδικούς αριθμούς.

Λύση. Επειδή $|1|=1$ και $\arg 1=0$,

$$1^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}[\log|1|+i(0+2k\pi)]} = e^{2k\sqrt{3}i}, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Συνεπώς το $1^{\sqrt{3}}$ έχει άπειρες τιμές που είναι όλες τοποθετημένες πάνω στο μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να υπολογιστεί η δύναμη i^i στους μιγαδικούς.

Λύση. Προφανώς $|i|=1$ και $\arg i = \frac{\pi}{2}$. Άρα οι δυνάμεις i^i είναι οι

$$i^i = e^{i\,[\log|i|+i\,(\theta+2k\pi)]} = e^{i\left[0+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \qquad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό είναι γνωστό ότι

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots,\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,\quad \sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Αν λοιπόν θέσουμε στις σχέσεις αυτές αντί για x το iθ, $-\pi<\theta\leq\pi$, τότε

$$e^{i\theta} = 1+\frac{i\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\ldots = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\ldots\right)+i\left(\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\ldots\right)=\cos\theta+i\sin\theta$$

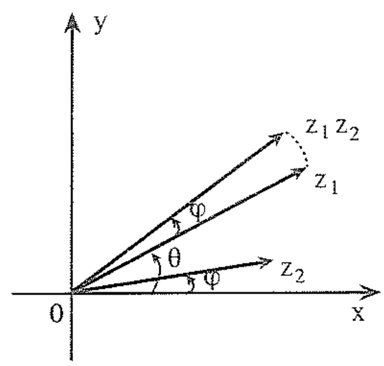
Άρα

$$e^{i\theta} = \cos\theta+i\sin\theta\,. \qquad (\text{τύπος Euler})\,.$$

Συνεπώς αν ο μιγαδικός αριμός $z = |z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, τότε σύμφωνα με τον τύπο του Euler αυτός γράφεται

$$z = |z|e^{i\theta}\,.$$

Η παράσταση αυτή του z λέγεται **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z. Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι αν $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ και $z_2 = e^{i\varphi}$, τότε το γινόμενο $z_1z_2 = |z_1|e^{i\,(\theta+\varphi)}$ έχει γεωμετρική εικόνα που προκύπτει από εκείνη του z_1 με στροφή κατά γωνία φ (Σχ. 4).



Σχ. 4

Είναι σκόπιμο να προσθέσουμε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ένα νέο στοιχείο που λέγεται **άπειρο** και παριστάνεται με ∞. Το σύνολο τώρα $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ λέγεται **επεκτεταμένο σύνολο των μιγαδικών αριθμών** ή **επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**. Ένα τέτοιο στοιχείο θα έχει μέτρο μεγαλύτερο από κάθε μιγαδικό αριθμό του $\mathbb{C}$. Βέβαια, το μιγαδικό άπειρο ∞ είναι διαφορετικό από το $-\infty$ και $+\infty$ της επεκταμένης μιγαδικής ευθείας.

Είναι, επίσης χρήσιμο να ορίσουμε μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο. Τις γνωστές, από την Αναλυτική Γεωμετρία, καμπύλες ευθείας $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, κύκλου $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma = 0$, έλλειψης κ.λπ. μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου αρκεί να θέσουμε στις προηγούμενες εξισώσεις, όπου $x = 1/2\,(z+\bar{z})$ και $y=1/2\,i(z-\bar{z})$. Έτσι (Σχ. 5α) ο κύκλος κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$

και ακτίνας $\alpha \geq 0$ στο $\mathbb{C}$ έχει προφανώς εξίσωση

$$|z - z_0| = \alpha .$$

Αλλά αφού $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \alpha^2$ ο προηγούμενος κύκλος έχει επίσης εξίσωση

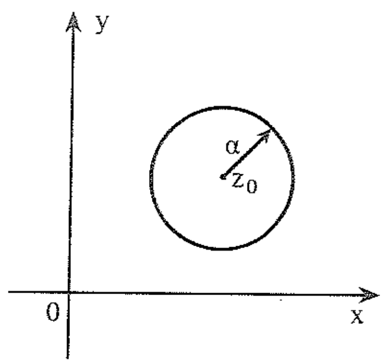
$$z\bar{z} - z_0\bar{z} - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - \alpha^2 = 0 .$$

Ακόμη επειδή ο κύκλος είναι μια απεικόνιση $z = z(t)$ από το $[0, 2\pi)$ στο $\mathbb{C}$, η εξίσωση του κύκλου έχει επίσης τη μορφή

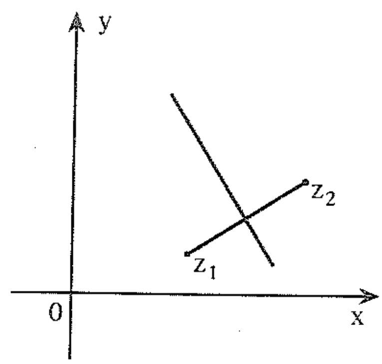
$$z = z_0 + \alpha(\cos t + i \sin t) = z_0 + \alpha e^{it} .$$

Η ευθεία (Σχ. 5β) που είναι μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα $z_1 z_2$ του $\mathbb{C}$ είναι προφανώς η

$$|z - z_1| = |z - z_2| .$$



Σχ. 5α



Σχ. 5β

Η ευθεία που περνάει από τα σημεία z_1 και z_2 με παράμετρο t είναι η

$$z(t) = (1-t)\, z_1 + t z_2 , \quad t \in [0, 1) .$$

Οι κάθετες στους άξονες $x = \alpha$ και $y = \beta$ ευθείες στο C είναι αντίστοιχα

$$z + \bar{z} = 2\alpha \quad \text{και} \quad z - \bar{z} = 2i\beta .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να περιγραφούν οι καμπύλες

(α) $|z| = 1, \ |z - i| = 1,$

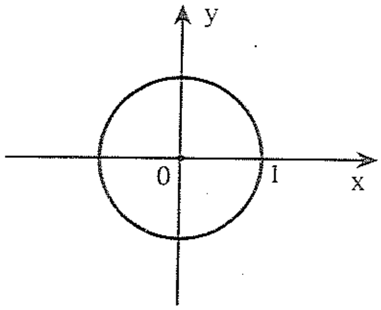
(b) $|z - 1| = |z - i|$

και τα σύνολα των σημείων του μιγαδικού επιπέδου

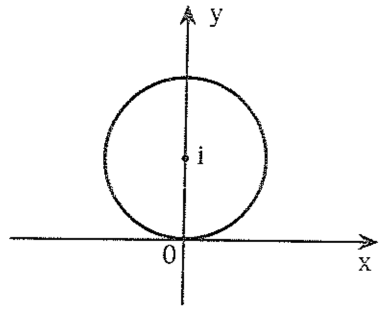
(c) $\{z: |z| < 1\}, \ \{z: 0 < |z| < 1\}, \ \{z: \operatorname{Re} z| > 1\}.$

Λύση. α) Η $|z| = 1$ είναι κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας 1. Η $|z - i| = 1$

κύκλος κέντρο i και ακτίνας 1 (σχ. 6α, 6β). Οι εξισώσεις αυτές γράφονται παραμετρικώς $z=e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ και $z=i+e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.

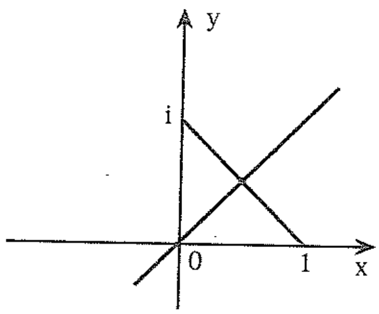


Σχ. 6α



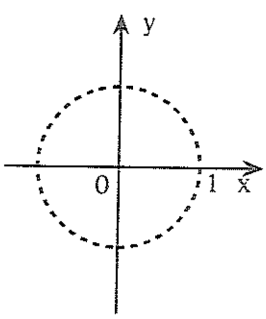
Σχ. 6β

b) Η $|z-1|=|z-i|$ είναι ευθεία μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία 1 και i του μιγαδικού επιπέδου (Σχ. 7).

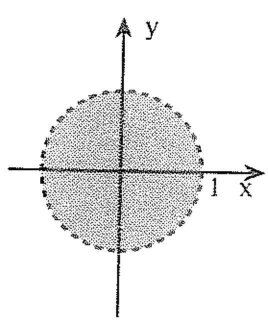


Σχ. 7

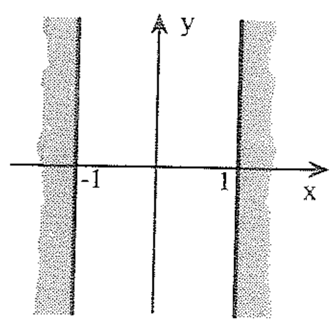
c) Το σύνολο $\{z: |z|<1\}$ παριστάνει το σύνολο των σημείων του $\mathbb{C}$ μέσα στον κύκλο $|z|=1$, το σύνολο $\{z: 0<|z|<1\}$ το σύνολο των σημείων του $\mathbb{C}$ εντός του κύκλου $|z|=1$ εκτός της αρχής 0 και το σύνολο των σημείων $\{z: |\operatorname{Re} z|>1\}$ τα σημεία του $\mathbb{C}$ εκτός της λωρίδας μεταξύ των ευθειών $x=\pm 1$ (Σχ. 8α, β, γ).



Σχ. 8α



Σχ. 8β



Σχ. 8γ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $|\alpha z+b|=|cz+d|$ παριστάνει κύκλο αν $\alpha \neq c$ και ευθεία αν $\alpha=c$, $\alpha, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Λύση. Εαν $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, $z=x+iy$, $b=b_1+ib_2$, $c=c_1+ic_2$, $d=d_1+id_2$, τότε

$$|(\alpha_1+i\alpha_2)(x+iy)+(b_1+ib_2)| = |(c_1+ic_2)(x+iy)+(d_1+id_2)|$$

Άρα

$$(\alpha_1 x-\alpha_2 y+b_1)^2+(\alpha_2 x+\alpha_1 y+b_2)^2 = (c_1 x-c_2 y+d_1)^2+(c_2 x+c_1 y+d_2)^2 .$$

Ή
$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-c_1^2-c_2^2)\,x^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2-c_1^2-c_2^2)\,y^2+$$
$$+2\,(\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2-c_1 d_1-c_2 d_2)\,x\,+$$
$$+\,2\,(-\alpha_2 b_1+\alpha_1 b_2+c_2 d_1-c_1 d_2)\,y = d_1^2+d_2^2-b_1^2-b_2^2.$$

Η τελευταία εξίσωση παριστάνει προφανώς κύκλο αν $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2 \neq c = c_1+ic_2$ και ευθεία αν $\alpha=c$, εφόσον στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές των δευτεροβάθμιων όρων μηδενίζονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Ποιά είναι η εξίσωση της ευθείας $x=\frac{1}{2}$ στο μιγαδικό επίπεδο;

Λύση. Αφού $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, έπεται ότι $\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}$ ή

$$z+\bar{z}=1$$

που είναι η εξίσωση της ευθείας $x=\frac{1}{2}$ στο $\mathbb{C}$.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Κάθε μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$ έχει μέτρο

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

και όρισμα θ που βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}, \quad -\pi<\theta\leq\pi .$$

2. Ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ είναι ο $\bar{z}=x-iy$, οπότε

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}), \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Ισχύει

$$z=\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad z=-\bar{z} \Leftrightarrow z \text{ καθαρός φανταστικός αριθμός}.$$

3. Η τριγωνομετρική (πολική) παράσταση του μιγαδικού αριθμού z με μέτρο $|z|$ και όρρισμα θ είναι η

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Ισχύει

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1+\theta_2)+i \sin(\theta_1+\theta_2)],$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι τα ορίσματα των z_1 και z_2 αντιστοίχως. Επίσης

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

και

$$(\cos\theta+i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{τύπος De Moivre}).$$

4. Οι n-οστές ρίζες του $z=|z|(\cos\theta+i \sin\theta)$ είναι οι n μιγαδικοί αριθμοί

$$w_\kappa = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\theta+2\kappa\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2\kappa\pi}{n}\right), \quad \kappa=0, 1, \ldots, n-1$$

ή

$$w_\kappa = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta+2\kappa\pi}{n}}, \quad \kappa = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5. Κάθε μιγαδικός αριθμός $z=|z| (\cos\theta+i \sin n\theta)$ έχει άπειρο πλήθος λογαρίθμων και άπειρο πλήθος δυνάμεων όταν ο εκθέτης δεν είναι ρητός, που δίνονται από τους τύπους

$$\log z = \log |z| + i(\theta+2\kappa\pi), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$z^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{όταν } z=0 \text{ και } \alpha \neq 0 \\ z^{\alpha [\log |z| + i (\theta+2\kappa\pi)]}, & z \neq 0, \ \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

6. Ισχύει

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad (\text{τύπος του Euler})$$

Συνεπώς κάθε μιγαδικός αριθμός $z=|z| (\cos\theta+i \sin\theta)$ παριστάνεται και με την εκθετική μορφή

$$z = |z|\, e^{i\theta}.$$

7. Η εξίσωση

$$|z-z_0| = \alpha$$

ή

$$z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0 z+|z_0|^2-\alpha^2 = 0$$

ή

$$z = z_0+\alpha(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad 0\leq\theta<2\pi$$

ή

$$z = z_0+\alpha e^{i\theta}$$

παριστάνει κύκλο κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνας α.

Η εξίσωση

$$|z-z_1| = |z-z_2|$$

παριστάνει ευθεία μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία z_1 και z_2 του μιγαδικού επιπέδου.

Η εξίσωση

$$z+\bar{z} = 2\alpha$$

παριστάνει την ευθεία $x=\alpha$.

8. Στο μιγαδικό επίπεδο προσαρτούμε και ένα ακόμη στοιχείο το άπειρο ∞ που έχει μέτρο μεγαλύτερο από κάθε μιγαδικό αριθμό. Δηλαδή το μιγαδικό επίπεδο έχει μόνο ένα άπειρο σημείο.

Ασκήσεις

1. Να εκφράσετε τους μιγαδικούς αριθμούς $2+2\sqrt{3}\,i$, $-5+5i$, $-6-\sqrt{2}\,i$, $-3i$ σε τριγωνομετρική και εκθετική μορφή.

(Απ. $4\text{cis}\,\dfrac{\pi}{3} = 4e^{i\frac{\theta}{3}}$, $5\sqrt{2}\,\text{cis}\,\dfrac{3\pi}{4} = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\dfrac{7\pi}{6} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$,

$3\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$)

2. Να δειχθεί ότι $\left(3\text{cis}\,\dfrac{2\pi}{9}\right)\left(4\text{cis}\,\dfrac{4\pi}{9}\right) = -6+6\sqrt{3}\,i$.

3. Να υπολογίσετε τις κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $1+i$

(Απ. $w_0 = \sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, $w_1 = \sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $w_2 = \sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$)

4. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $-15-8i$.

(Απ. $\pm\sqrt{17}\,\text{cis}\,\dfrac{u}{2} = \pm(-1+4i)$, όπου $\cos\theta = -\dfrac{15}{17}$, $\sin\theta = -\dfrac{8}{17}$).

5. Να λυθεί η εξίσωση $z^2+(2i-3)z+5-i=0$.
(Απ. $(z_1=2-3i,\ z_2=1+i)$.

6. Να λυθεί η εξίσωση $z^4+1=0$.
(Απ. $z_\kappa = e^{i\frac{\kappa\pi}{4}}$, $\kappa=1,2,3,4$)

7. Να λυθεί η εξίσωση $(1+z)^5=(1-z)^5$
(Απ. $0, \frac{\omega-1}{\omega+1}, \frac{\omega^2-1}{\omega^2+1}, \frac{\omega^3-1}{\omega^3+1}, \frac{\omega^4-1}{\omega^4+1}$, όπου $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$)

8. Να δειχθεί ότι $|z+1|^2+|z-1|^2=2(|z|^2+1)$.

9. Να δειχθεί ότι $|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

10. Δείξτε ότι οι ρίζες πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές είναι ανά δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

11. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $|z_2|=|z_2|$. Να δειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(z_1+z_2)^2$ και $(z_1-z_2)^2$ του μιγαδικού επιπέδου περνάει από την αρχή των συντεταγμένων.

12. Αν ο μιγαδικός αριθμός $w=\frac{z-i}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών z.
(Απ. $x^2+y^2+x-y=0$)

13. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 είναι πάνω στον κύκλο $|z|=2$ και $z_1+z_2+z_3=0$ να δειχθεί ότι το τρίγωνο του μιγαδικού επιπέδου με κορυφές τα σημεία z_1, z_2, z_2 είναι ισόπλευρο.

14. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_\nu|=1$ να δειχθεί ότι

$$|z_1+z_2+\ldots+z_\nu| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_\nu}\right|$$

15. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους $\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}=\frac{\pi}{2}$.
(Απ. $x^2+y^2=1$).

16. Αν ω είναι κυβική μη πραγματική ρίζα της μονάδας να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 3\,.$$

17. Αν $|w|=1$ και $z = \frac{1}{2+w}$ να δειχθεί ότι $\left|z-\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$.

18. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο με κορυφές z_1+z_2, z_1-z_2 και $z_1+i\sqrt{3}\, z_2$, $z_2 \neq 0$ είναι ισόπλευρο.

19. Αν $\frac{z-3\bar{z}+2}{z-2}$, $z \neq 2$ είναι καθαρός φανταστικός αριθμός, τότε οι μιγαδικοί αριθμοί z βρίσκονται πάνω σε μια υπερβολή στο $\mathbb{C}$.

20. Αν z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι η ευθεία που περνάει από τα z_1 και z_2 έχει παραμετρική εξίσωση $z=tz_1+(1-t)\, z_2$, $t \in \mathbb{R}$.

21. Τι παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο οι εξισώσεις

$$|z-(-2+i)|=4, \quad |2z-1|=|z-2|, \quad |z-i|+|z+i|=4 .$$

(Απ. Κύκλος, κύκλος, έλλειψη).

3. Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις

Είναι γνωστό ότι ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός ασχολείται κυρίως με τη μελέτη των **στοιχειωδών συναρτήσεων**, δηλαδή των πολυωνύμων, των ρητών συναρτήσεων, των εκθετικών τριγωνομετρικών, υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφων αυτών, όπως και όλων εκείνων των συναρτήσεων που προκύπτουν με πεπερασμένο πλήθος πράξεων πρόσθεσης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και εξαγωγής ρίζας. Ομοίως, όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι μιγαδικές στοιχειώδεις συναρτήσεις παρουσιάζουν το ίδιο ενδιαφέρον όπως και οι πραγματικές στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Καταρχή **μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής** $w=f(z)$ είναι μια απεικόνιση από ένα υποσύνολο D των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια συνήθως τις τιμές της μεταβλητής $z=x+iy$ τις θεωρούμε σε ένα μιγαδικό επίπεδο που το λέμε **z-επίπεδο** και τις τιμές της w τις παίρνουμε σε ένα μιγαδικό επίπεδο που το λέμε **w-επίπεδο** και γράφουμε $w=u+iv$, όπου $u(x, y)$ και $v(x, y)$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού w. Αντίστροφα αν $w=u(x, y)+iv(x, y)$, τότε θέτοντας $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ και $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ εκφράζουμε τη συνάρτηση w ως συνάρτηση του z, δηλαδή $w=f(z)$.

Εφόσον ορίσαμε τη δύναμη z^n τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις δεν χρειάζονται να οριστούν στους μιγαδικούς.

Η **εκθετική συνάρτηση** $e^z=e^{x+iy}$ στους μιγαδικούς ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μετατρέπεται στην πραγματική συνάρτηση e^x όταν $y=0$ και να έχει τις αυτές αλγεβρικές και διαφορικές ιδιότητες με την e^x. Οι ιδιότητες αυτές πληρούνται αν οριστεί ως

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \operatorname{cis} y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^y \sin y .$$

Επειδή $e^{z+2\pi i}=e^x \operatorname{cis}(y+2\pi)=e^x \operatorname{cis} y$, έπεται ότι η e^z είναι περιοδική μιγαδική, συνάρτηση περιόδου $2\pi i$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης μιγαδικού αριθμού, η

$$e^z = e^{z\,[\log e + i\,(0+2n\pi)]} = e^{z(1+2n\pi i)}$$

είναι πλειονότιμη, εμείς όμως ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση e^z όπως προηγουμένως, ώστε να είναι μονότιμη.

Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos z$ **και** $\sin z$ ορίζονται με βάση την εκθετική συνάρτηση. Πράγματι αν ορίσουμε ως

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

τότε, αν $z=x \in \mathbb{R}$, με βάση τον τύπο του Euler, έχουμε ότι $\cos z=\cos x$ και $\sin z=\sin x$. Προφανώς οι συναρτήσεις $\cos z$ και $\sin z$ είναι περιοδικές περιόδου 2π. Ισχύει επίσης ο βασικός τύπος της Τριγωνομετρίας $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ και όλοι οι τύποι για το ημίτονο και συνημίτονο του $z_1 \pm z_2$. Προφανώς

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y .$$

Οι μιγαδικές **υπερβολικές συναρτήσεις** ορίζονται όπως οι πραγματικές υπερβολικές συναρτήσεις, δηλαδή

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

και είναι περιοδικές μιγαδικής περιόδου $2\pi i$, όπως η e^z.

Τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ και $\cosh z$ είναι όλες μονότιμες συναρτήσεις.

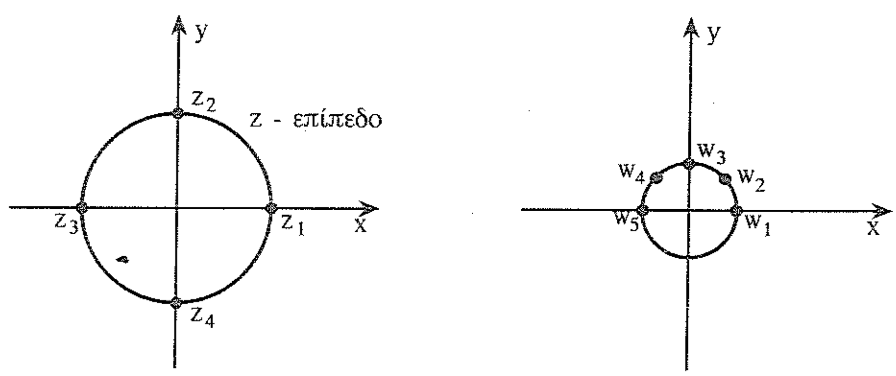
Κατ' ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι αντίστροφες συναρτήσεις των εκθετικών, τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων που είναι πλειονότιμες. Αποδεικνύεται ότι

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \log[iz+\sqrt{1-z^2}], \qquad \cos^{-1} z = \frac{1}{i} \log[z+\sqrt{z^2-1}]$$

$$\sinh^{-1} z = \log [z+\sqrt{z^2+1}] , \qquad \cosh^{-1} z = \log [z+\sqrt{z^2-1}] .$$

Είναι πολύ ενδιαφέρουσα η εξέταση των πλειονότιμων συναρτήσεων στις μιγαδικές συναρτήσεις γι' αυτό στη συνέχεια θα αναπτύξουμε αναλυτικά μια τέτοια συνάρτηση.

Οι μη ακέραιες δυνάμεις των μιγαδικών δίνουν γενικά πλειονότιμες συναρτήσεις, όπως τονίστηκε προηγουμένως. Π.χ. στη μιγαδική συνάρτηση $w=z^{1/2}$, σε κάθε z αντιστοιχούν δύο διακεκριμένες τιμές του w (αν $z \neq 0$) συμμετρικώς τοποθετημένες ως προς την αρχή. Έτσι λέμε ότι η συνάρτηση $w=z^{1/2}$ είναι μια **πλειονότιμη** συνάρτηση που απεικονίζει ένα σημείο του z-επιπέδου σε δύο διακεκριμένα σημεία του w-επιπέδου. Για να γίνει πιο κατανοητή η συνάρτηση αυτή θέτουμε π.χ. $z=4\text{cis}\theta$. Όταν αυξάνεται το θ, το z διαγράφει κύκλο ακτίνας 4 στο z-επίπεδο. (Σχ. 1).



Σχ. 1

Εκλέγουμε το w κατά τέτοιο τρόπο ώστε η αρχική τιμή του $w=2\text{cis}\,\frac{\theta}{2}$ και παρακολουθούμε τη μεταβολή αυτού καθώς μεταβάλλεται το θ.

Όταν $z=z_1=4\text{cis}0=4$, $z=z_2=4\text{cis}\frac{\pi}{2}=4i$, $z=z_3=4\text{cis}\pi=-4$, $z=z_4=4\text{cis}\frac{3\pi}{2}=-4i$ και $z=z_5=4\text{cis}2\pi=4$, τότε $w_1=2$, $w_2=2\text{cis}\frac{\pi}{4}$, $w_3=2i$, $w_4=2\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$ και $w_5=2\text{cis}\pi=-2$. Συνεπώς καθώς το z παίρνει πάλι την πρώτη τιμή ($\theta=2\pi$) το w παίρνει τιμή αντίθετη της αρχικής. Αν θ παίρνει τιμές μεταξύ 2π και 4π το w διαγράφει το κάτω ημικύκλιο και ως συνάρτηση του θ πληρεί τη σχέση $w(\theta)=-w(\theta-2\pi)$.

Το προηγούμενο παράδειγμα μας υποδεικνύει ότι δύο z-επίπεδο πρέπει μάλλον να χρησιμοποιηθούν για να παραστήσουμε την απεικόνιση $w=z^{1/2}$. Στο πρώτο από αυτά λαμβάνονται εκείνες οι τιμές του z για τις οποίες $0 \leq \theta < 2\pi$ και στο δεύτερο εκείνες οι τιμές του z για τις οποίες $2\pi \leq \theta < 4\pi$. Τελικώς η συνάρτηση $w=f(z)=z^{1/2}$ αναλύεται με τον τρόπο αυτό σε δύο συναρτήσεις $f_1(z) = |z|^{1/2} \operatorname{cis}\frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και $f_2(z) = |z|^{1/2} \operatorname{cis}\frac{\theta}{2}$, $2\pi \leq \theta < 4\pi$. Κάθε μια από αυτές τις συναρτήσεις καλείται **κλάδος** της πλειονότιμης συνάρτησης f(z) και ο θετικός άξονας Ox ο οποίος χωρίζει τους δύο κλάδους καλείται **κλαδική τομή**. Θα ήταν δυνατό, εξίσου αποτελεσματικώς, αν λαμβάνονταν ο αρνητικός ημιάξονας Ox ως κλαδική τομή, όπως, επίσης, οποιαδήποτε ημιευθεία από την αρχή των συντεταγμένων. Το κοινό σημείο όλων αυτών των τομών, σ' αυτή την περίπτωση η αρχή των συντεταγμένων, καλείται **κλαδικό σημείο**. Τα σημεία αυτά αποτελούν ένα είδος **ανώμαλων σημείων** όπως θα δείτε στα επόμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστούν οι ρίζες της εξίσωσης $e^z + i = 0$.

Λύση. Από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης

$$e^z = e^x \cos y + e^x i \sin y + i = 0 .$$

Άρα

$$e^x \cos y = 0 \quad (1) , \qquad e^x \sin y = -1 \quad (2) .$$

Επειδή $e^x \neq 0$, από τη σχέση (1), έπεται ότι

$$\cos y = 0 \quad \text{ή} \quad y = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} .$$

Οπότε, από τη σχέση (2)

$$e^x \sin y = \pm e^x = -1.$$

Επειδή $e^x \neq -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, έχουμε $e^x = 1$ και άρα $x=0$. Όμως, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο κ δεν μπορεί να είναι άρτιος, δηλαδή δε μπορούμε να έχουμε

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi\right) = -1$$

έτσι ώστε οι ρίζες που ζητούμε είναι οι $z = \left(\frac{\pi}{2} + \kappa\pi\right) i$, κ περιττός ή $z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i$, $n \in \mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης $f(z)=z^{1/3}$ για $z=-i$ στους τρεις κλάδους αυτής.

Λύση. Οι τρεις κλάδοι της συνάρτησης $f(z)=z^{1/3}$ είναι οι $f_1(z)=z^{1/3}$, $0\leq\theta<2\pi$, $f_2(z)=z^{1/3}$, $2\pi\leq\theta<4\pi$, $f_3(z)=z^{1/3}$, $4\pi\leq\theta<6\pi$ οπότε

$$f_1(-i) = f_1\left(1\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}\right) = \text{cis}\,\frac{\pi}{2} = i$$

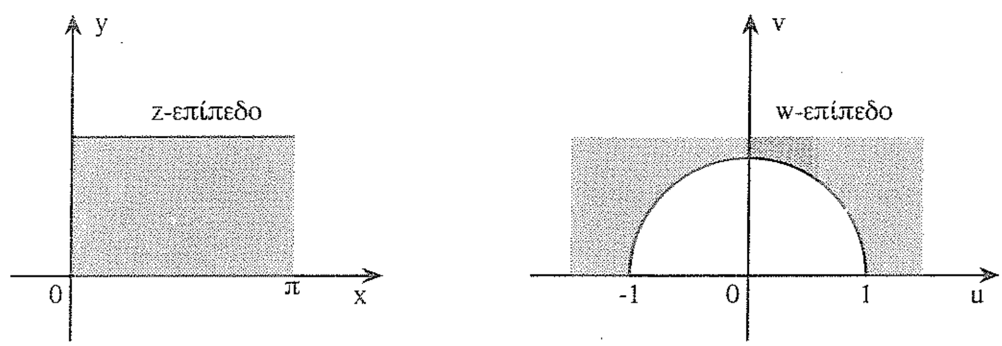
$$f_2(-i) = f_2\left(1\text{cis}\,\frac{7\pi}{2}\right) = \text{cis}\,\frac{7\pi}{6} = -\text{cis}\,\frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$f_3(-i) = f_3\left(1\text{cis}\,\frac{11\pi}{2}\right) = \text{cis}\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να βρεθεί η εικόνα του τόπου $x\geq 0$, $0\leq y\leq\pi$ με τη συνάρτηση $w=e^z$.

Λύση. Ως γνωστό, $w=|z|\text{cis}y$, οπότε $|z|=e^x$ και $\arg w=y$. Συνεπώς, αν $x\geq 0$, τότε $|z|\geq 1$ και αν $0\leq y\leq\pi$, τότε $0\leq \text{Arg}\,w\leq\pi$. Ο ζητούμενος τόπος φαίνεται, συνεπώς, στο επόμενο σχήμα 2.



Σχ. 2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να δειχθεί ότι η εικόνα της ευθείας $y=y_0=$σταθ. με τη συνάρτηση $w=\sin z$ είναι μια έλλειψη.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των $\cos z$ και $\sin z$, βρίσκουμε

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\,\cos(iy)+\sin(iy)\,\cos x$$

$$= \sin x \, \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} \cos x$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u+iv \, .$$

Άρα η εικόνα της ευθείας $y=y_0$ σε παραμετρική μορφή είναι οι

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y_0 \\ v &= \cos x \sinh y_0 \end{aligned}\right\} \text{ ή (χωρίς παράμετρο) } \frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1 \, .$$

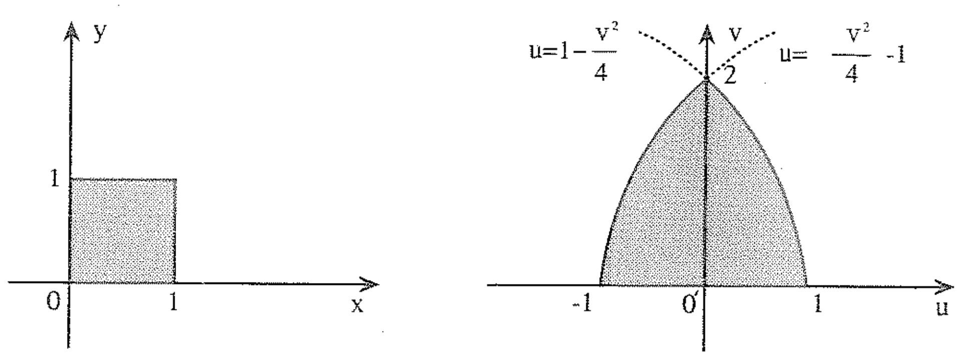
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρεθεί η εικόνα του τετραγώνου $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ με τη συνάρτηση $f(z)=z^2$.

Λύση. Έχουμε $w=f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy=u+iv$. Οπότε

$$u(x, y) = x^2-y^2, \quad v(x, y) = 2xy \, .$$

Η εικόνα της πλευράς $y=0$, $0 \leq x \leq 1$ του τετραγώνου δίνεται από τις $u(x, 0)=x^2$, $v(x, 0)=0$, $0 \leq x \leq 1$, (Σχ. 3) που είναι τα σημεία του άξονα O΄u στο w-επίπεδο μεταξύ 0 και 1. Ομοίως η εικόνα της πλευράς του τετραγώνου $x=1$, $0 \leq y \leq 1$, δίνεται από τις $u(1, y)=1-y^2$, $v(1, y)=2y$, $0 \leq y \leq 1$, ή $u=1-\frac{v^2}{4}$, $0 \leq v \leq 2$. Συνεχίζοντας ομοίως η ζητούμενη εικόνα είναι αυτή που φαίνεται στο επόμενο Σχ. 3.



Σχ. 3

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να δειχθεί ότι $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \log(iz+\sqrt{1-z^2})$ αν ληφθεί ως $\sin^{-1} 0=0$.

Απόδειξη. Αν $w=\sin^{-1} z$, τότε $z=\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$, οπότε

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0 \quad \text{ή} \quad e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}=iz+\sqrt{1-z^2}$$

αφού η $\pm\sqrt{1-z^2}$ προκύπτει από την $\sqrt{1-z^2}$. Αλλά, επίσης, ισχύει

$$e^{i(w-2\kappa\pi)}=iz+\sqrt{1-z^2} \quad \text{ή} \quad w=2\kappa\pi+\frac{1}{i}\log(iz+1-z^2)$$

Ο κλάδος για τον οποίο $w=0$, όταν $z=0$, προκύπτει θέτοντας $\kappa=0$, οπότε, τελικά,

$$\sin^{-1}z=\frac{1}{i}\log\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Οι δυνάμεις $w=z^n$, $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, είναι μονότιμες συναρτήσεις.

2. Οι δυνάμεις $w=z^\alpha$, $z\in\mathbb{C}$, α ρητός αριθμός, είναι πλειονότιμες συναρτήσεις πεπερασμένου πλήθους τιμών, ενώ είναι άπειρου πλήθους τιμών αν α είναι μιγαδικός όχι ρητός.

3. Η εκθετική συνάρτηση $w=e^z$ ορίζεται ως η μονότιμη συνάρτηση

$$w=e^{x+iy}=e^x \operatorname{cis} y$$

και είναι περιοδική περιόδου $2\pi i$.

4. Με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης, ορίζουμε τις τριγωνομετρικές και υπερβολικές μιγαδικές συναρτήσεις

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

και είναι όλες μονότιμες και περιοδικές.

5. Οι αντίστροφες των προηγούμενων τεσσάρων μιγαδικών συναρτήσεων είναι οι

$$\sin^{-1}z=\frac{1}{i}\log\left[iz+\sqrt{1-z^2}\right], \qquad \cos^{-1}z=\frac{1}{i}\log\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]$$

$$\sinh^{-1}z=\log\left[z+\sqrt{z^2+1}\right], \qquad \cosh^{-1}z=\log\left[z+\sqrt{z^2-1}\right]$$

και είναι όλες πλειονότιμες.

6. Τέλος η συνάρτηση $w=z^{1/n}$, $n\in\mathbb{N}$, είναι n-τιμών πλειονότιμη συνάρτηση, δηλαδή έχει n-κλάδους.

Ασκήσεις

1. Να εκφραστούν οι επόμενες συναρτήσεις $w=f(z)=z^{-2}+z$ και $w=f(z)=z\bar{z}+5z$, υπό τη μορφή $w=u(x, y)+iv(x, y)$.
(Απ. $w=(x^2-y^2+x)+i(y-2xy)$, $w=x^2+y^2+5x+i5y$)

2. Να εκφραστούν οι συναρτήσεις $w=f(z)=x^2+y^2$, $w=f(z)=y+ix$ και $w=(x^3-xy^2-2xy^2)+i(2x^2y+yx^2-y^3)$ υπό τη μορφή $w=f(z)$.
(Απ. $w=f(z)=z\bar{z}$, $w=f(z)=iz$, $w=f(z)=z^3$).

3. Να λυθούν οι εξισώσεις $e^z=1$, $e^z=-1$, $e^z=0$.
(Απ. $z=2\kappa\pi i$, $z=(2\kappa+1)\pi i$, Δεν έχει λύση).

4. Να υπολογιστούν οι τιμές (α) $(-1)^{1/4}$, (b) $(-32)^{1/5}$, (c) $(-4i)^{1/2}$.

$\Big($Απ. (α) $\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$, $\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$,

(b) $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{5}$, $2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{5}$, $2\operatorname{cis}\pi$, $2\operatorname{cis}\frac{9\pi}{5}$,

(c) $2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\Big)$.

5. Να βρείτε το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $\cos(-i)$ και $\sin(1+i)$.
(Απ. $\cos(-1)=\cosh 1$, $\sin(1+i)=\sin 1\cosh 1+i\cos 1\sinh 1$)

6. Αποδείξτε ότι (α) $\cos(iz)=\cosh z$, (b) $\sin(iz)=i\sinh z$.

7. Βρείτε την τιμή του z ώστε $\log(z+1)=\pi i$.

8. Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $x=x_0$ με τη συνάρτηση $w=\sin z$.

$\Big($Απ. Η υπερβολή $\frac{u^2}{\sin^2 x_0}-\frac{v^2}{\cos^2 x_0}=1\Big)$.

9. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sin z=\sin x\cosh y+i\sinh y\cos x$ δείξτε ότι $|\sinh y|\leq|\sin z|\leq|\cosh y|$.

10. Να δειχτεί ότι $\tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, αν $\tanh^{-1}0=0$.

4. Συνεχείς και ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μόνο μονότιμες συναρτήσεις. Για να επεκταθούν οι ορισμοί και τα θεωρήματα που αφορούν το όριο, τη συνέχεια και την παράγωγο των συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής στις μιγαδικές συναρτήσεις απαιτείται μόνο η αντικατάσταση του x με το z και η θεώρηση ανοικτών τόπων στο z-επίπεδο αντί των ανοικτών διαστημάτων. Συγκεκριμένα έστω η συνάρτηση f: $D \to \mathbb{C}$ $(F \subset D)$ και $z_0 \in \mathbb{C}$.

Η συνάρτηση f(z) έχει **όριο** το w_0 όταν το z τείνει στο z_0 (συμβολικώς $\lim_{z \to z_0} f(x) = w_0$ αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon>0,\quad \exists\ \delta>0,\quad \forall\ z \in D,\quad 0<|z-z_0|<\delta \Leftrightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση f: $\mathbb{C}-\{i\} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}$. Να δειχθεί ότι $\lim_{z \to i} f(z) = 2i$.

Λύση. Πράγματι $|f(z)-2i|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{(z+i)\,(z-i)}{z-i} -2i\right| = |z-i| < \varepsilon$.
Αν λοιπόν ληφθεί $\delta=\varepsilon$, τότε ισχύει ο ορισμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να δειχθεί ότι το $\lim_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $z=x+iy$ τείνει στο μηδέν κατά μήκος του άξονα Ox. Τότε

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{x}{x} = 1 .$$

Έστω, όμως, $z \to 0$ κατά μήκος του άξονα Oy. Τότε,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1 .$$

Η εύρεση δύο διαφορετικών τιμών για το όριο, γνωρίζοντας βέβαια ότι το όριο ορίζεται μονότιμα, σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει.

Οι ορισμοί του ορίου στις περιπτώσεις που $z_0=\infty$, δηλαδή $z \to \infty$ είναι ανάλογοι των γνωστών ορισμών για τις πραγματικές συναρτήσεις. Ομοίως αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Επίσης, έστω η συνάρτηση f: $D \to \mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$, $z_0 \in D$.
Η συνάρτηση $w=f(z)$ θα λέγεται **συνεχής** στο $z_0 \in D$ αν και μόνο αν

$$\forall\ \varepsilon>0,\quad \exists\ \delta>0,\quad \forall\ z \in D,\quad 0\le |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon .$$

Ο ορισμός αυτός μας δηλώνει ότι η $f(z)$ είναι συνεχής στο z_0 αν το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και αν $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Αν η συνάρτηση $w=f(z)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $z_0 \in D$, τότε η $f(z)$ λέγεται **συνεχής**.

Ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα τα οποία διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, $z_0=x_0+iy_0$, $w_0=u_0+iv_0$. **Ισχύει η ισοδυναμία**

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Η συνάρτηση $w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ **είναι συνεχής στο** $z_0 = x_0+iy_0$ **αν και μόνο αν οι συναρτήσεις** $u(x, y)$, $v(x, y)$ **είναι συνεχείς στο** (x_0, y_0).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση $f(z)=\bar{z}$, είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Έχουμε $f(z_0)=\bar{z}_0$. Οπότε

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(z)-f(z_0)| = |\bar{z}-\bar{z}_0| = |\overline{z-z_0}| = |z-z_0| < \varepsilon .$$

Αν λοιπόν ληφθεί το $\delta=\varepsilon$ ο ορισμός ισχύει και άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

Η μιγαδική συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο $z_0 \in D$ ο δε αριθμός $w_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται **παράγωγος αριθμός** ή απλά **παράγωγος** της $f(z)$ στο z_0, αν και μόνο αν

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = w_0 .$$

Η παράγωγος της $f(z)$ στο z_0 παριστάνεται με $f'(z_0)$ ή $\left.\dfrac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$

Αν $h=z-z_0$, τότε το προηγούμενο όριο γράφεται

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} .$$

Η συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$ λέγεται **παραγωγίσιμη** (στον D) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $z_0 \in D$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$\forall\ z \in D,\ g(z) = f'(z)$$

λέγεται **παράγωγος συνάρτηση** της f ή απλούστερα **παράγωγος** της f και συμβολίζεται $f'(z)$ ή $\dfrac{df}{dz}$.

Έτσι π.χ. $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, κ.λπ.

Ασφαλώς, ισχύουν, κατ' επέκταση, όλα τα γνωστά θεωρήματα που αφορούν την παραγώγιση για τις πραγματικές συναρτήσεις. Π.χ. **κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής, το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και η σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.** Επίσης, ισχύουν όλοι οι κανόνες παραγώγισης.

Μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής χωρίς να είναι παραγωγίσιμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

Απόδειξη. Η συνάρτηση αυτή, όπως αποδείχτηκε στο Παραδ. 3, είναι συνεχής. Έχουμε, όμως

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+h}-\bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{z}_0+\bar{h}-\bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Αλλά, τώρα, το $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\bar{h}}{h}$ δεν υπάρχει, όπως αποδείχτηκε στο Παραδ. 2.

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Βασιζόμενοι, τώρα, στον ορισμό της παραγώγου θα δώσουμε τον ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης οι οποίες αποτελούν μια σπουδαία κλάση μιγαδικών συναρτήσεων με τις οποίες και θα ασχοληθούμε κυρίως στο υπολοιπόμενο μέρος αυτού του κεφαλαίου.

Το σύνολο των σημείων $z \in \mathbb{C}$ που ανήκουν στο δίσκο $|z-z_0|<\varepsilon$ λέγεται **ε-περιοχή** κέντρου z_0 και ακτίνας ε και συμβολίζεται με $\pi(z_0, \varepsilon)$.

Η συνάρτηση $f\colon D \to \mathbb{C}$ $(D \subset \mathbb{C})$ λέγεται **ολόμορφη** ή **αναλυτική** στο σημείο $z_0 \in D$, αν

(i) υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\pi(z_0, \varepsilon) \subset D$ και

(ii) η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της $\pi(z_0, \varepsilon)$.

Η κλάση των ολόμορφων συναρτήσεων περιέχεται στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z)=|z|^2$, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0=0$ και δεν είναι ολόμορφη στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Έστω $z_0=0$. Έχουμε,

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\bar{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0\,.$$

Άρα $f'(0)=0$.

Έστω $z_0\neq 0$. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|z_0+h|^2-|z_0|^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)\,(\bar{z}_0+\bar{h})-z_0\bar{z}_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{z\bar{z}_0+z_0\bar{h}+h\bar{z}_0+h\bar{h}-z_0\bar{z}_0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(z_0\frac{\bar{h}}{h}+\bar{z}_0+\bar{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}z_0\frac{\bar{h}}{h}\,,$$

που όπως είδαμε δεν υπάρχει. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $z_0\neq 0$ και άρα δεν υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στην περιοχή $\pi(0,\varepsilon)$ και συνεπώς η f δεν είναι ολόμορφη στο 0.

Η συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{C}$ λέγεται **ολόμορφη** όταν είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο του D.

Βεβαίως το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και η σύνθεση ολόμορφων συναρτήσεων είναι ολόμορφη συνάρτηση. Επίσης, όλες οι μονότιμες στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι ολόμορφες σε κάθε σημείο $z_0\in\mathbb{C}$. Οι πλειονότιμες στοιχειώδεις συναρτήσεις έχουν ολομόρφους όλους τους κλάδους τους σε όλα τα σημεία $z_0\in\mathbb{C}$ εκτός των κλαδικών τομών αυτών.

Στο επόμενο βασικό θεώρημα δίνονται οι συνθήκες που λέγονται **συνθήκες των** Cuachy-Riemann ώστε μια συνάρτηση να είναι ολόμορφη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

«**Έστω η ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση** $f\colon D\to\mathbb{C}$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ **όπου** D **ανοικτός τόπος του** $\mathbb{C}$. **Τότε, για κάθε** $(x,y)\in D$, **υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι** $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial v}{\partial y}$ **και για κάθε** $(x,y)\in D$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (\text{Συνθήκες C}-\text{R}).$$

Αντιστρόφως αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ **είναι συνεχείς σε κάθε σημείο** $(x, y) \in D$ **και ισχύουν οι συνθήκες** C–R, **τότε η συνάρτηση** $f(z)$ **είναι ολόμορφη στον** D **και μάλιστα**

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y} \text{»}.$$

Απόδειξη. Έχουμε καταρχή $\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$.

Εφόσον η $f(z)$ είναι ολόμορφη, συνεπώς παραγωγίσιμη, το $\lim\frac{\Delta w}{\Delta z}$ έχει την αυτή τιμή ανεξάρτητη του δρόμου τον οποίο ακολουθεί το z πλησιάζοντας το z_0. Εκλέγουμε έναν, παράλληλο προς τον άξονα Ox, δρόμο στον οποίο βέβαια $\Delta y=0$ και αφήνουμε πάνω σ' αυτόν το $z\to z_0$. Θα έχουμε $\Delta z=\Delta x$ και

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\Delta v}{\partial x}. \tag{1}$$

Ομοίως εκλέγουμε έναν, παράλληλο προς τον άξονα Oy, δρόμο στον οποίο βέβαια $\Delta x=0$ και αφήνουμε πάνω σ' αυτόν το $z\to x_0$. Θα έχουμε $\Delta z=i\Delta y$ και

$$f'(z_0)=\lim\left(\frac{\Delta u}{i\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=-i\frac{\Delta u}{\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta y}. \tag{2}$$

Από τις (1), (2), επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του D, έπεται ότι, για κάθε $(x, y)\in D$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος αποδεικνύεται εύκολα λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες C–R και από τη συνέχεια των μερικών παραγώγων έπεται ότι υπάρχουν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ που τείνουν στο μηδέν ώστε

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+$$

$$+i\left(\Delta x\frac{\partial v}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\varepsilon_3\Delta x+i\varepsilon_4\Delta y$$

$$= \left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - \Delta y \frac{\Delta v}{\partial x}\right) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y +$$

$$= i \left(\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

$$= (\Delta x + i\Delta y) \frac{\partial u}{\partial x} + i(\Delta x + i\Delta y) \frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y.$$

Αν $\Delta z \to 0$, τότε $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ και $\frac{\Delta x}{\Delta z} \leq 1$, $\frac{\Delta y}{\Delta z} \leq 1$. Συνεπώς,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Άρα υπάρχει η παράγωγος $f'(z_0)$ για κάθε $z_0 \in D$.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό u_x, u_y κ.λπ. για τις μερικές παραγώγους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να βρεθούν εκείνα τα σημεία στα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{3} x^3 + i\left(y - \frac{1}{3} y^3\right)$$

είναι παραγωγίσιμη και εκείνα στα οποία αυτή είναι ολόμορφη.

Λύση. Έχουμε $u = \frac{1}{3} x^3$, $v = y - \frac{1}{3} y^3$. Συνεπώς, $u_x = x^2$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 1 - y^2$. Από τις συνθήκες C−R προκύπτει $u_x = x^2 = 1 - y^2 = v_y$ και $u_y = 0 = -v_x$. Άρα $x^2 + y^2 = 1$, δηλαδή η παράγωγος f' υπάρχει μόνο πάνω στα σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ και πουθενά αλλού. Συνεπώς δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ και σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ τέτοιο ώστε να υπάρχει η f' για κάθε σημείο της περιοχής $\pi(z_0, \varepsilon)$. Επομένως η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι ολόμορφη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

Έστω ότι η συνάρτηση $f(z) = u + iv$ είναι ολόμορφη σε έναν τόπο D. Τότε οι συναρτήσεις u και v πληρούν τις συνθήκες C−R. Δηλαδή,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4).$$

Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι συναρτήσεις u και v έχουν και δεύτερες μερικές παραγώγους συνεχείς στον D. Τότε, παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (3) ως προς x και της (4) ως προς y βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} \quad (5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \qquad (6)$$

από τις οποίες προκύπτει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \qquad (7)$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (3) ως προς y και της (4) ως προς x, βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (8)$$

Κάθε πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών που ικανοποιεί μια σχέση όπως η (7) ή (8) λέγεται **αρμονική** και αν επιπλέον οι u, v είναι το πραγματικό και μιγαδικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης f(z), τότε οι u και v λέγονται **συζυγείς αρμονικές** συναρτήσεις. Συνεπώς το πραγματικό και μιγαδικό μέρος u και v μιας ολόμορφης συνάρτησης είναι αρμονικές συναρτήσεις. Η εξίσωση (7) λέγεται **διαφορική εξίσωση του** Laplace.

Όταν, επομένως, μας δοθεί μια αρμονική συνάρτηση, π.χ. η $u = u(x, y)$ **τότε υπάρχει μια μόνο, κατά προσέγγιση σταθερής, συνάρτηση αρμονική (συζυγής αρμονική της** u) $v=v(x, y)$ **τέτοια ώστε η συνάρτηση** $f(z) = u+iv$ **να είναι ολόμορφη**, όπως φαίνεται από τα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, για την οποία, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v(x, y)=6xy-5x$ και $f(-i)=-5$;

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{matrix} v_x = 6y-5 & (1) \\ v_y = 6x & (2) \end{matrix} . \quad \text{Άρα} \quad \begin{matrix} v_{x^2} = 0 \\ v_{y^2} = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow v_{x^2}+v_{y^2} = 0 .$$

Δηλαδή η $v = 6xy-5x$ είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^2$, συνεπώς υπάρχει η συζυγής της αρμονική συνάρτηση u, τέτοια ώστε

$$\begin{matrix} u_x = v_y & (3) \\ u_x = -v_x & (4) \end{matrix} \xrightarrow{(4),\ (2)} u_x=-v_x=-6y+5 \Rightarrow u=-3y^2+5y+\varphi(x) \quad (5)$$

$$(1),\ (3),\ (5) \Rightarrow u_x=\varphi'(x)=v_y=6x \Rightarrow \varphi(x)=3x^2+c \quad (6)$$

Από τις (5), (6) $\Rightarrow u=-3y^2+5y+3x^2+c$. Άρα

$$f(2) = u+iv = (-3y^2+5y+3x^2+c)+i\,(5xy-5x) .$$

Αλλά $f(-i)=-5$, οπότε για $z=x+iy=-i$, δηλαδή για $x=0$ και $y=-1$ $f(-i)=(-3-5+c)+i\cdot 0=-5 \Rightarrow c=3$ και άρα

$$f(z) = (3x^2-3y^2+5y+3)+i\,(6xy-5x)\,.$$

Για να εκφράσουμε την $f(z)$ ως συνάρτηση του z ή θέτουμε στην τελευταία σχέση όπου $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ ή χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα: Έστω $f(z)=f(x+iy)$. Για $y=0$, $f(z)=f(x)=3x^2+3-i5x$, και θέτοντας πάλι σ' αυτή $x=z$, βρίσκουμε

$$f(x) = 3z^2-5iz-3\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$ όταν γνωρίζουμε ότι

$$\operatorname{Re}(f(z)) = 3x^2-4y-3y^2 \quad \text{και} \quad f(1+i)=0\,.$$

Λύση. Μας δίνεται ότι

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(x,y) = 3x^2-4y-3y^2$$

άρα

$$u_{x^2}+u_{y^2} = 6-6 = 0\,.$$

Επομένως, η συνάρτηση u είναι αρμονική. Συνεπώς, υπάρχει μια (κατά προσέγγιση σταθερής) αρμονική συνάρτηση v ώστε η $f(z)=u+iv$ να είναι ολόμορφη την οποία βρίσκουμε με τη βοήθεια των συνθηκών $\mathbb{C}-\mathbb{R}$. Έχουμε, από την πρώτη συνθήκη $\mathbb{C}-\mathbb{R}$,

$$u_x = v_y \quad \text{ή} \quad v_y = u_x = 6x \Rightarrow v = 6xy+\varphi(x)\,.$$

Από τη δεύτερη συνθήκη $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ και την τελευταία σχέση, βρίσκουμε

$$v_x = -u_y \quad \text{ή} \quad 6y+\varphi'(x) = 4+6y \Rightarrow \varphi'(x) = 4 \Rightarrow \varphi(x) = 4x+c$$

και άρα

$$v = 6xy+4x+c \quad \text{και} \quad f(z) = (3x^2-4y-3y^2)+i\,(6xy+4x+c)\,.$$

Για $z=x+iy=1+i$, δηλαδή για $x=y=1$, έχουμε

$$f(1+i)=(3-4-3)+i\,(6+4+c)=0 \Rightarrow -4+i\,(10+c_1+ic_2)=0 \Rightarrow -4-c_2=0$$

και

$$10+c_1 = 0\,,$$

οπότε $c_1=-10$ και $c_2=-4$, δηλαδή $c=-10-4i$. Άρα,

$$f(x) = (3x^2-4y-3y^2)+i\,(6xy+4x-10-4i)\,.$$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Η συνάρτηση $f(z)$ έχει **όριο** τον $w_0 \in \mathbb{C}$, όταν $z \to z_0 \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \ \exists\, \delta>0,\ \ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon .$$

2. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι **συνεχής** στο z_0 αν και μόνο αν

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \ \exists\, \delta>0,\ \ 0\leq|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon .$$

3. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι **παραγωγίσιμη** στο z_0 αν και μόνο αν υπάρχει $w_0 \in \mathbb{C}$, ώστε

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = w_0 .$$

4. Η συνάρτηση $f\colon D\to\mathbb{C}$ $(D\subset\mathbb{C})$ λέγεται **ολόμορφη** ή **αναλυτική** στο $z_0 \in D$ αν και μόνο αν (i) υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $\pi(z_0, \varepsilon) \subset D$ και (ii) η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της $\pi(z_0, \varepsilon)$.

5. Αν η μιγαδική συνάρτηση $f=u+iv$, από τον ανοικτό τόπο D στον $\mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε για κάθε $(x, y) \in D$ **υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι** u_x, u_y, v_x, v_y και ισχύουν οι **συνθήκες** $\mathbb{C}-\mathbb{R}$

$$u_x = v_y\,, \qquad u_y = -v_x .$$

Αντιστρόφως αν οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς σε κάθε σημείο $(x, y) \in D$ και ισχύουν οι συνθήκες $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f(z)$ είναι ολόμορφη στον τόπο D και

$$f'(z) = u_x+iv_x .$$

6. Αν $u_{x^2}+u_{y^2} = 0$ (διαφορική εξίσωση του Laplace), τότε η συνάρτηση $u(x, y)$ λέγεται **αρμονική**.

7. Το πραγματικό και μιγαδικό μέρος u και v μιας ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης f είναι **αρμονικές** (συζυγείς αρμονικές) και αν δοθεί η μια από αυτές μπορούμε να **προσδιορίσουμε** την άλλη ώστε η συνάρτηση $f=u+iv$ να είναι ολόμορφη.

8. Οι καμπύλες $u(x, y)=$σταθ. και $v(x, y)=$σταθ. είναι **ορθογώνιες** και το $w=u+iv$ λέγεται **μιγαδικό δυναμικό**.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim\limits_{z\to e^{\pi i/3}} (z-e^{\pi i/3}) \dfrac{z}{z^3+1}$ (b) $\lim\limits_{z\to e^{\pi i/4}} \dfrac{z^2}{z^4+z+1}$ (c) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z^6+1}$.

(Απ.: (α) $\dfrac{1}{6}-i\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ (c) $\dfrac{1}{3}$).

2. Έστω η συνάρτηση: $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z-i}, & z\neq i \\ 2i, & z=i. \end{cases}$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο σημείο $z=i$.

3. Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων

(α) $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2+2z+2}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\cos z}$.

(Απ. (α) $z=-1\pm i$, (b) $0,\ \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$).

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3+9}$ είναι συνεχής και φραγμένη στον τόπο, $|z|\leq 2$.

5. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ και $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$.

6. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f_1(z)=\operatorname{Re} z$, $f_2(z)=\operatorname{Im} z$ και $f_3(z)=|z|$ είναι συνεχείς και δεν είναι παραγωγίσιμες σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

7. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z)=z\operatorname{Re} z$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και δεν είναι ολόμορφη στο σημείο αυτό.

(Υπόδειξη: Θέστε $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$).

8. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$f_1(z)=z^3+z+1$, $f_2(z)=ze^z$, $f_3(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $f_4(z)=z^2+\sin 2z$.

(Απ.: $f_1'(z)=3z^2+1$, $f_2'(z)=e^z+ze^z$, $f_3'(z)=\dfrac{-2}{(z-1)^2}$, $f_4'(z)=2z+2\cos 2z$).

9. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z)=2xy+i\,(x^2+y^2)$ δεν είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

10. Να προσδιοριστούν οι τιμές των κ και λ για τις οποίες η συνάρτηση $f(z) = 2x+\kappa y+i\,(3x+\lambda y)$ είναι ολόμορφη.

(Απ.: $\kappa=-3$, $\lambda=2$).

11. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z)=z^2\bar{z}$ δεν είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

12. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f_1(z)=x^3+iy^2$ και $f_2(z)=x$ δεν είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$.

13. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $v(x, y)=2xy+y$ είναι συζυγής αρμονική της συνάρτησης $u(x, y)=x^2-y^2+x+1$ και να εκφραστεί η ολόμορφη συνάρτηση $f=u+iv$ μόνο με τη μεταβλητή z.

(Απ. $f(z) = z^2+z+1$).

14. Δίνεται η συνάρτηση $u(x, y) = 3(x^2-y^2)-2x$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική.

(ii) Να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u.

(iii) Να εκφραστεί η ολόμορφη συνάρτηση $f=u+iv$, μόνο με τη μεταβλητή z.

(Απ. $v(x, y) = 6xy-2y+c$, $f(z) = 3z^2-2z+ic$).

15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $u(x, y)=xy^2$ δε μπορεί να είναι το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης.

16. Σε ποιό σημείο z_0 υπάρχει η $f'(z_0)$, αν

$$f(z) = (x^2+2y)+i\,(x^2+y^2);$$

(Απ. $z_0 = -1-i$).

17. Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές των οικογενειών

(i) $x^3y-xy^3 = \alpha$, $\alpha=$σταθ., (ii) $r^2\cos 2\theta = \alpha$, $\alpha=$σταθ.

(Απ. $x^4-6x^2y^2+y^4 = \beta$, $r^2\sin 2\theta = \beta$).

5. Σύμμορφες απεικονίσεις

Έστω ότι η απεικόνιση

$$w = f(z) = u(x, y)+iv(x, y)\ ,$$

είναι ορισμένη σ' ένα τόπο R_z του z-επιπέδου και έστω ότι κάθε $z=x+iy$ αντιστοιχεί σε μια τιμή $w=u+iv$ ενός τόπου R_w του w-επιπέδου. Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε σημείο w του R_w αντιστοιχεί σε μία