

Ποσοτική και Ποιοτική  
Περιγραφή Νευροηλεκτρικών  
Φαινομένων

## Ολοκλήρωση της εξίσωσης Nernst-Planck

---

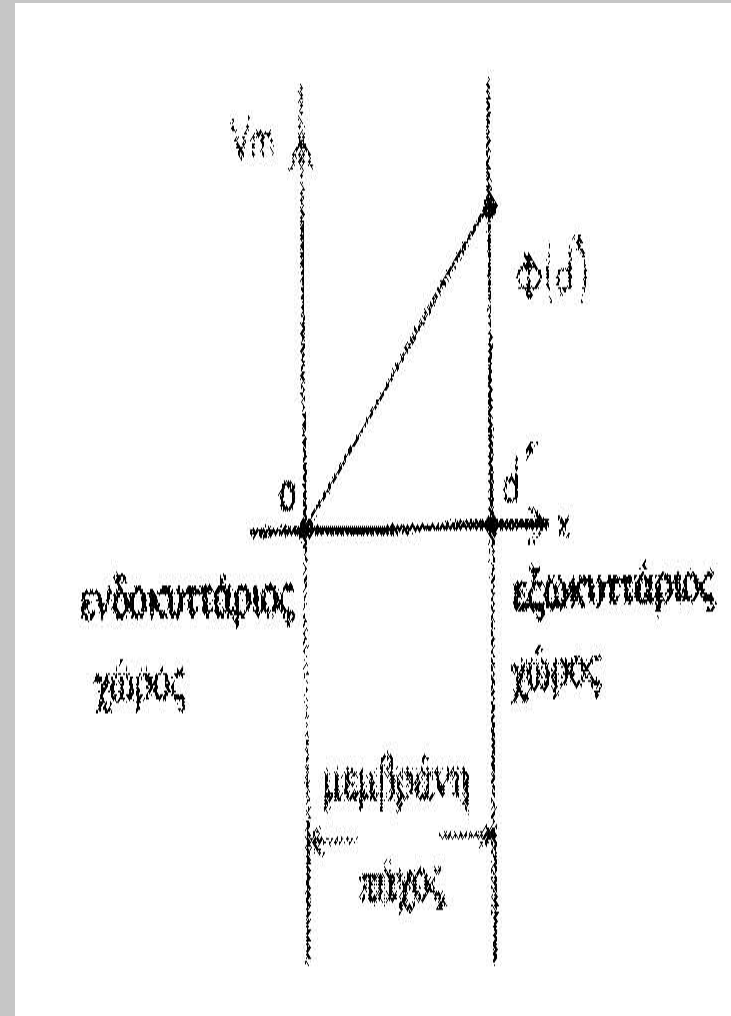
- ⊙ Η δυσκολία εφαρμογής της εξίσωσης Nernst-Planck σε μία βιολογική μεμβράνη οφείλεται στο γεγονός ότι η μεταβολή είτε της  $C_p$  είτε του  $\Phi$  μέσα στη μεμβράνη είναι άγνωστη και επηρεάζονται από τα φορτία του χώρου.
- ⊙ Επειδή η μεμβράνη είναι σχετικά λεπτή το  $\Phi$  μέσα στη μεμβράνη μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται γραμμικά.
- ⊙ Ο Goldman χρησιμοποίησε αυτή την προϋπόθεση για να ολοκληρώσει την εξίσωση Nernst-Planck και επιτυγχάνεται κάτω από συνθήκες σταθεράς κατάστασης.

# Μοντέλο της μεμβράνης σε μία διάσταση με γραμμική μεταβολή του δυναμικού στο εσωτερικό χώρο της μεμβράνης

◉ Έχουμε 
$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{[\Phi(d^*) - \Phi(0)]}{d^*} = \frac{-V_m}{d^*}$$

όπου  $V_m$  είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού της μεμβράνης και  $d^*$  είναι το πάχος της μεμβράνης.

◉ Το πάχος της μεμβράνης θεωρείται ότι είναι πολύ λεπτό και κάθε μικρό τμήμα της είναι ουσιαστικά επίπεδο.



# Ροή p-ιόντος ανά μονάδα επιφάνειας

---

- $$j = -D_p \left[ \frac{dC_p}{dx} + \frac{C_p F}{RT} \frac{d\Phi}{dx} \right]$$

- Για το ιόν του Καλίου έχουμε:

$$\frac{d[C_k]}{dx} = -\frac{j_k}{D_k} + \frac{V_m F}{RTd^*} [C_k] \Rightarrow \frac{d[C_k]}{-\frac{j_k}{D_k} + \frac{V_m F}{RTd^*} [C_k]} = dx$$

- Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση μέσα στη μεμβράνη από το αριστερό άκρο ( $x=0$ ) στο δεξιό άκρο ( $x=d^*$ ) καταλήγουμε στη σχέση:

$$j_k = \frac{D_k V_m F}{RTd^*} \frac{([C_k]_{d^*} - [C_k]_0 e^{V_m F/RT})}{(1 - e^{V_m F/RT})}$$

# Ροή p-ιόντος ανά μονάδα επιφάνειας

---

- ⊙ Η συγκέντρωση του καλίου στο μέσο που περιβάλλει τη μεμβράνη σχετίζεται με αυτή στο εσωτερικό της μεμβράνης μέσω των συντελεστών διαμέρισης  $\beta$ .
- ⊙ Οι συντελεστές αυτοί θεωρούνται οι ίδιοι στις δύο επιφάνειες.
- ⊙ Αν θεωρήσουμε το άκρο 0 ότι είναι σε επαφή με τον ενδοκυττάριο χώρο, τότε:  $[C_k]_{d^*} = \beta_K [K]_e, [C_k]_0 = \beta_K [K]_i$
- ⊙ Επειδή η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος  $J_K$  που οφείλεται στη ροή του καλίου είναι ίση με  $F J_k$  και ο συντελεστής διαμέρισης σχετίζεται με τη διαπερατότητα του καλίου  $P_K$  προκύπτει:

# Ροή p-ιόντος ανά μονάδα επιφάνειας

---

$$J_k = \frac{P_k V_m F^2}{RT} \frac{([K]_e - [K]_i e^{V_m F/RT})}{(1 - e^{V_m F/RT})}$$

© Για το χλώριο που είναι αρνητικό ιόν ισχύει  
ότι

$$J_k = \frac{P_{Cl} V_m F^2}{RT} \frac{[Cl]_i - [Cl]_e e^{V_m F/RT}}{(1 - e^{V_m F/RT})}$$

# Συνδυασμένη ροή πολλών ιόντων

---

- ◉ Παρόμοια έκφραση με τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει για την πυκνότητα ρεύματος  $J_{Na}$ .
- ◉ Το ολικό ιοντικό ρεύμα είναι το άθροισμα των ιοντικών συνιστωσών, δηλ.  $J = J_k + J_{Na} + J_{Cl}$
- ◉ Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

- ◉ 
$$J = \frac{P_K V_m F^2}{RT} \frac{(w - ye^{V_m F/RT})}{(1 - e^{V_m F/RT})}$$
$$w = [K]_e + \frac{P_{Na}}{P_K} [Na]_e + \frac{P_{Cl}}{P_K} [Cl]_i$$
$$y = [K]_i + \frac{P_{Na}}{P_K} [Na]_i + \frac{P_{Cl}}{P_K} [Cl]_e$$

# Εξίσωση Goldman για το δυναμικό μεμβράνης

---

- Οι βιολογικές μεμβράνες δεν μπορούν να είναι σε ισορροπία για όλα τα ιόντα.
- Το δυναμικό καμιάς μεμβράνης δεν μπορεί ταυτόχρονα να εξισορροπηθεί για όλα τα ιόντα.
- Η συνθήκη ηρεμίας μπορεί να χαρακτηριστεί ως σταθερά κατάσταση η οποία απαιτεί  $J=0$  και επομένως

$$w - ye^{V_m F/RT} = 0$$

- Επομένως, το δυναμικό της μεμβράνης  $V_m$  δίνεται από τη σχέση:

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{w}{y} = \frac{RT}{F} \ln \left\{ \frac{P_K [K]_e + P_{Na} [Na]_e + P_{Cl} [Cl]_i}{P_K [K]_i + P_{Na} [Na]_i + P_{Cl} [Cl]_e} \right\}$$

- Η παραπάνω εξίσωση καλείται εξίσωση **Goldman**



# Παράδειγμα

---

- ⊙ Οι συγκεντρώσεις των ιόντων  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  και  $\text{Cl}^-$  σε  $\mu\text{M}/\text{cm}^3$  δίνονται ως εξής:
- ⊙  $[\text{C}_{\text{Na}}]_e = 455$ ,  $[\text{C}_{\text{Na}}]_i = 72$ ,  $P_{\text{Na}} = 0.07$
- ⊙  $[\text{C}_{\text{K}}]_e = 10$ ,  $[\text{C}_{\text{K}}]_i = 345$ ,  $P_{\text{Na}} = 1.8$
- ⊙  $[\text{C}_{\text{Cl}}]_e = 540$ ,  $[\text{C}_{\text{Cl}}]_i = 61$ ,  $P_{\text{Cl}} = 0.8$
- ⊙ Να υπολογισθούν:
  - I. Τα δυναμικά **Nernst** για τα 3 ιόντα
  - II. Να υπολογισθεί το δυναμικό της μεμβράνης

# Λύση

---

I. Εφαρμόζοντας τη σχέση:

$$\Delta = \frac{59.4}{Z_p} \log_{10} \left( \frac{[C_p]_e}{[C_p]_i} \right) \quad mV$$

για τα 3 ιόντα βρίσκουμε:  $\Delta_{Na} = 49.3 \text{ mV}$ ,  $\Delta_K = -95 \text{ mV}$ ,  
 $\Delta_{Cl} = -58 \text{ mV}$

II. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Goldman βρίσκουμε  
 $V_m = -63 \text{ mV}$