

## Κεφάλαιο 8

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΒΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Έστω  $X_t$ , μία διακριτή χρονοσειρά,  $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Θεωρούμε ότι

$$\mu_x = E\{X_t\} \text{ και}$$

$$\gamma_{xx}(\tau) = \text{cov}\{X_{t+\tau}, X_t\} = E\{[X_{t+\tau} - \mu_x][X_t - \mu_x]\}, \quad \tau = 0, \pm 1, \dots$$

Το φάσμα ισχύος της  $X_t$  ορίζεται ως εξής

$$f_{xx}(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma_{xx}(\tau) \exp(-i\lambda\tau), \quad -\pi < \lambda < \pi \quad (8.1)$$

αρκεί 
$$\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} |\gamma_{xx}(\tau)| < \infty$$

Το φάσμα ισχύος,  $f_{xx}(\lambda)$ , είναι μία άρτια και περιοδική συνάρτηση (με περίοδο  $2\pi$ ).

Από τη σχέση (8.1) μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει

$$\gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\alpha\tau) f_{xx}(\alpha) d\alpha, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8.2)$$

Αν θέσουμε  $\tau = 0$  στην (8.2) έχουμε

$$\text{Var}X_t = \int_{-\pi}^{\pi} f_{xx}(\alpha) d\alpha, \quad (8.3)$$

Περνώντας τη χρονοσειρά  $X_t$  μέσα από ένα φίλτρο

$$X_t \rightarrow Y_t = \sum_{\tau} \alpha_{t-\tau} X_{\tau}$$

βρίσκουμε

$$f_{yy}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_{xx}(\lambda), \quad (8.4)$$

όπου  $f_{yy}(\lambda)$ ,  $f_{xx}(\lambda)$  είναι το φάσματα ισχύος των χρονοσειρών  $Y_t$ ,  $X_t$  και  $A(\lambda)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου  $\alpha_{\tau}$

$$A(\lambda) = \sum_{\tau} \alpha_{\tau} \exp(-i\lambda\tau), \quad (8.5)$$

Από τις σχέσεις (8.3) και (8.4) έχουμε

$$\text{Var}Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} |A(\alpha)|^2 f_{xx}(\alpha) d\alpha, \quad (8.6)$$

Χρησιμοποιώντας την (8.6) μπορούμε να επιτύχουμε μία ερμηνεία του φάσματος ισχύος. Υποθέτουμε ότι  $\alpha_{\tau}$  είναι ένα στενό ζωνοπερατό (narrow band-pass) φίλτρο, έχοντας συνάρτηση μεταφοράς

$$A(\alpha) = \begin{cases} (4\Delta)^{-1/2} & , \quad |\alpha \pm \lambda| < \Delta \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad (8.7)$$

όπου  $\Delta$  είναι μικρό.

Τότε 
$$\text{Var}Y_t = \int f_{yy}(\alpha) d\alpha = \int |A(\alpha)|^2 f_{xx}(\alpha) d\alpha = f_{xx}(\lambda)$$

δηλαδή το φάσμα ισχύος της χρονοσειράς  $X_t$  σε συχνότητα  $\lambda$  είναι ανάλογο προς τη διασπορά της εξόδου από ένα στενό χαμηλοπερατό φίλτρο σε συχνότητα  $\lambda$ .

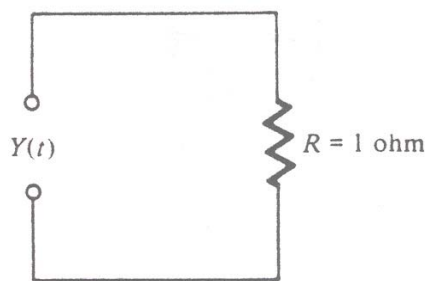
Από τη σχέση  $Y_t = \sum_{\tau} \alpha_{t-\tau} x_t$  έχουμε ότι

$$\mu_y = A(0)\mu_x \quad (8.8)$$

Η  $\mu_y = 0$  αν  $\lambda$  είναι μεγαλύτερο του  $\Delta$  και διάφορο από τα  $0, \pm 2\pi$

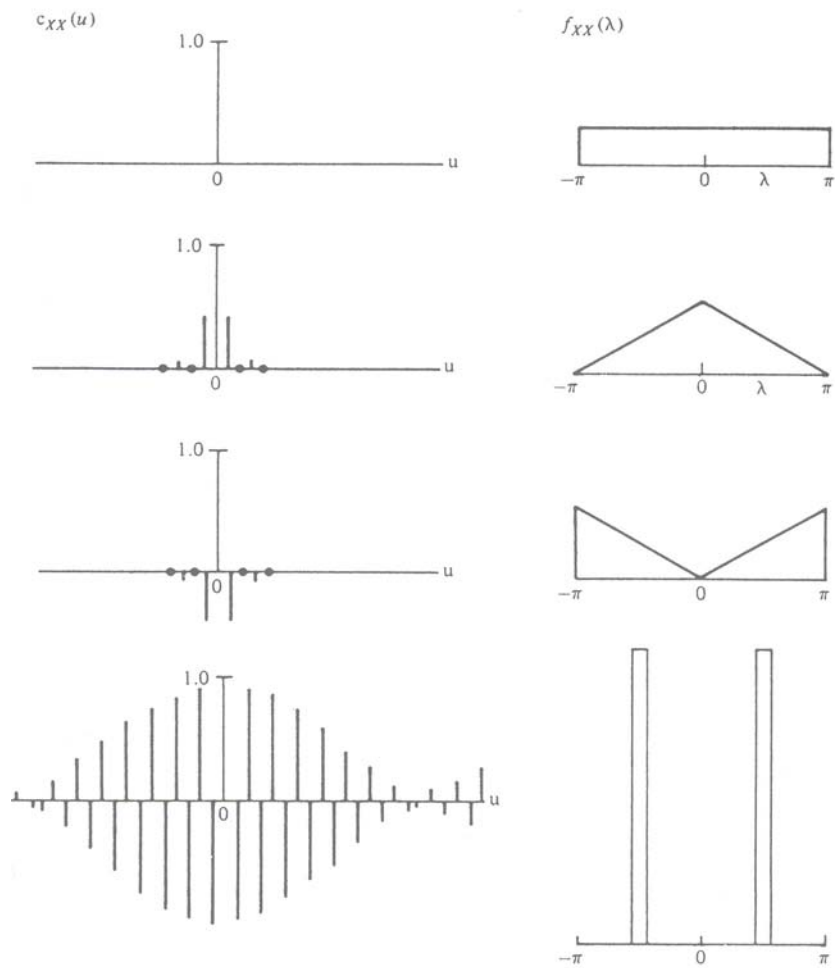
$$E(Y_t^2) \cong f_{xx}(\lambda) \quad \text{αν } \lambda \neq 0, \pm 2\pi, \dots, \text{ και } t=0, \pm 1, \dots \quad (8.9)$$

Τώρα, αν  $Y_t$  είναι το δυναμικό που εφαρμόζεται σε ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα που περιέχει μία αντίσταση  $R=1 \text{ Ohm}$ , τότε η στιγμιαία ισχύς που καταναλίσκεται είναι  $Y_t^2$ . Εξέταση της σχέσης (8.9) δείχνει ότι η  $f_{xx}(\lambda)$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η αναμενόμενη ποσότητα της ισχύος που καταναλίσκεται σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα όπως το ανωτέρω.



Δίνουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα συναρτήσεων αυτοδιασποράς με τα αντίστοιχα φάσματα ισχύος (Σχ. 8.1.). Για παράδειγμα, αν η  $\gamma_{xx}(\tau)$  συγκεντρώνεται γύρω από το σημείο  $\tau = 0$ , τότε η  $f_{xx}(\lambda)$  είναι περίπου σταθερά. Αν η  $\gamma_{xx}(\tau)$  ελαττώνεται αργά καθώς  $\tau$  αυξάνει, τότε η  $f_{xx}(\lambda)$  συγκεντρώνεται κοντά στις τιμές  $\lambda=0, \pm 2\pi, \dots$

Αν η  $\gamma_{xx}(\tau)$  εναλλάσσεται γύρω από το  $0$  καθώς  $\tau$  αυξάνει, τότε η  $f_{xx}(\lambda)$  έχει σημαντική μάζα μακριά από το  $\lambda=0, \pm 2\pi, \dots$



**Σχήμα 8.1.** Συναρτήσεις αυτοδιασποράς,  $\gamma_{xx}(\tau)$  και αντίστοιχα φάσματα ισχύος.

**Παράδειγμα 8.1.** Έστω  $\{Z_t\}$  μία καθαρά διακριτή τυχαία χρονοσειρά με μέση

$$\text{τιμή } \theta \text{ και } \text{cov}(Z_{t+\tau}, Z_t) = \begin{cases} \sigma_z^2 & , \tau = 0 \\ 0 & , \tau \neq 0 \end{cases}$$

Να υπολογισθεί το φάσμα ισχύος της  $Z_t$ .

**Λύση :** Για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της  $Z_t$  έχουμε

$$\text{cov}(Z_{t+\tau}, Z_t) = \begin{cases} \sigma_z^2 & , \tau = 0 \\ 0 & , \tau \neq 0 \end{cases}$$

οπότε, εφαρμόζοντας τον τύπο (8.1), βρίσκουμε

$$f_{zz}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi}, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

Άρα το φάσμα ισχύος μιας καθαρής διακριτής τυχαίας χρονοσειράς είναι σταθερό στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$ .

**Παράδειγμα 8.2.** Να δειχθεί το φάσμα ισχύος ενός  $MA(1)$  μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} (1 + 2\beta \cos \lambda + \beta^2), \quad -\pi < \lambda < \pi$$

**Λύση :** Από το προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι για ένα  $MA(1)$  μοντέλο ισχύουν οι σχέσεις

$$\gamma_{xx}(\tau) = \sigma_z^2(1 + \beta^2) \quad \text{και} \quad \gamma_{xx}(\tau) = \begin{cases} \beta\sigma_z^2 & , \quad \tau = 1 \\ 0 & , \quad \tau > 1 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (8.1) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_{xx}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) \cos \lambda \tau \right] \\ &= \frac{\sigma_z^2}{2\pi} [1 + \beta^2 + 2\beta \cos \lambda], \quad -\pi < \lambda < \pi \end{aligned}$$

Το σχήμα του φάσματος ισχύος,  $f_{xx}(\lambda)$ , εξαρτάται από την τιμή του  $\beta$ . Αν το  $\beta > 0$ , η ισχύς συγκεντρώνεται σε χαμηλές συχνότητες. Αν  $\beta < 0$ , η ισχύς συγκεντρώνεται σε υψηλές συχνότητες.

**Παράδειγμα 8.3.** Να δειχθεί ότι το φάσμα ισχύος ενός  $AR(1)$  μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2} \quad (-\pi < \lambda < \pi)$$

**Λύση :** Από τον ορισμό του φάσματος ισχύος έχουμε

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_{xx}(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{-i\lambda\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma_{xx}(\tau) e^{i\lambda\tau} \right]$$

Επειδή  $\gamma_{xx}(\tau) = \alpha^\tau \gamma_{xx}(0)$  ( $\tau > 0$ ) παίρνουμε

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{\gamma_{xx}(0)}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^\tau e^{-i\lambda\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha^\tau e^{i\lambda\tau} \right] =$$

$$\frac{\gamma_{xx}(0)}{2\pi} \left[ 1 + \frac{\alpha^\tau e^{-i\lambda}}{1 - \alpha^\tau e^{-i\lambda}} + \frac{\alpha^\tau e^{i\lambda}}{1 - \alpha^\tau e^{i\lambda}} \right] = \frac{\gamma_{xx}(0)}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2}$$

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2} \quad (-\pi < \lambda < \pi) \quad \text{και} \quad \sigma_z^2 = \gamma_{xx}(0)(1 - \alpha^2)$$

Όταν το  $\alpha > 0$ , η ισχύς συγκεντρώνεται σε χαμηλές συχνότητες, ενώ αν το  $\alpha < 0$  η ισχύς συγκεντρώνεται σε υψηλές συχνότητες.

**Παράδειγμα 8.4.** Να υπολογισθεί το φάσμα ισχύος ενός  $ARMA(1, 1)$  μοντέλου.

**Λύση :** Η εξίσωση ενός  $ARMA(1, 1)$  μοντέλου δίνεται από τη σχέση

$$X_t - \alpha X_{t-1} = Z_t + \beta Z_{t-1}$$

Αν θέσουμε  $Y_t = Z_t + \beta Z_{t-1}$ , τότε από το Παρ. 8.2 βρίσκουμε

$$f_{yy}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} (1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2) \quad (-\pi < \lambda < \pi)$$

Τώρα, αν θέσουμε  $Y_t = X_t - \alpha X_{t-1}$  μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το Παρ. 8.3 και τη σχέση (8.4) ότι

$$f_{xx}(\lambda) = \frac{f_{yy}(\lambda)}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2}$$

Τελικά βρίσκουμε ότι

$$f_{yy}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{(1 - 2\beta \cos \lambda + \beta^2)}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2}, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

### Συνοπείς εκτιμητές του φάσματος ισχύος

Ένας εκτιμητής του φάσματος ισχύος μιας διακριτής χρονοσειράς είναι το περιόδωγραμμα το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$I_{xx}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} |d_x^{(T)}(\lambda)|^2 \quad (8.10)$$

Όπου  $d_x^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} X_t e^{-i\lambda t}$  είναι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier της χρονοσειράς  $X_t$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η εξής σχέση

$$I_{xx}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{(T-1)} c_\tau e^{-i\lambda \tau} = \frac{1}{2\pi} \left[ c_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{(T-1)} c_\tau \cos \lambda \tau \right] \quad (8.11)$$

όπου  $c_\tau = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} (X_{t+\tau} - \bar{X})(X_t - \bar{X})$  είναι ένας εκτιμητής της συνάρτησης αυτοδιασποράς. Η σχέση (8.11) μας λέει ότι το περιοδόγραμμα είναι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $c_\tau$ .

Το περιοδόγραμμα  $I_{xx}^{(T)}(\lambda)$  δεν είναι συνεπής εκτιμητής για το φάσμα ισχύος, γι' αυτό χρειάζεται να βρούμε μια μέθοδο που θα μας δίνει συνεπείς εκτιμητές του φάσματος ισχύος. Μία τέτοια μέθοδος στηρίζεται στον εκτιμητή (8.11) που βελτιώνεται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο «βαρών», τα οποία καλούνται σύνολα βαρών. Η ακρίβεια των συντελεστών  $c_\tau$  ελαττώνεται καθώς το  $\tau$  αυξάνει, και επομένως θα ήταν λογικό να δώσουμε λιγότερο βάρος στις τιμές των  $c_\tau$  καθώς  $\tau$  αυξάνει.

Ένας τέτοιος εκτιμητής ορίζεται ως εξής

$$\hat{f}_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left\{ c_0 + 2 \sum_{\tau=1}^M w_\tau c_\tau \cos \lambda \tau \right\}, \quad (8.12)$$

όπου  $\{w_\tau\}$  είναι το σύνολο των βαρών και  $M(<T)$  είναι το σημείο αποκοπής των συντελεστών αυτοσυσχέτισης. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (8.12) και (8.11) βλέπουμε ότι οι τιμές των  $c_\tau$  για  $M < \tau < T$  δεν χρησιμοποιούνται πλέον, ενώ οι τιμές των  $c_\tau$  για  $\tau \leq M$  πολλαπλασιάζονται με ένα συντελεστή βάρους  $w_\tau$ .

Για τη χρησιμοποίηση του εκτιμητού (8.12) χρειάζεται να εκλέξουμε ένα κατάλληλο σύνολο «βαρών» και ένα κατάλληλο σημείο αποκοπής. Δύο σύνολα βαρών που χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη είναι :

**(α) Σύνολο Βαρών του Tukey.**

Το σύνολο αυτό των βαρών υπολογίζεται από τη σχέση

$$w_\tau = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi \tau}{M} \right) \quad \text{για } \tau=0, 1, \dots, M$$

**(α) Σύνολο Βαρών του Parzen.**

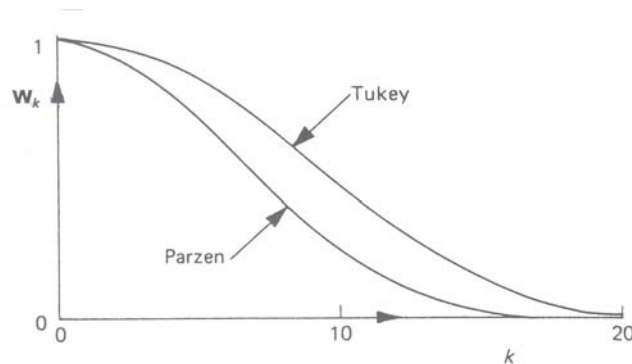
Στην περίπτωση αυτή τα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση



$$w_\tau = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\tau}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{\tau}{M}\right)^3, & \text{για } 0 \leq \tau \leq \frac{M}{2} \\ 2\left(1 - \frac{\tau}{M}\right)^3, & \text{για } \frac{M}{2} \leq \tau \leq M \end{cases}$$

Η διασπορά του εκτιμητού (8.12) δίνεται από τη σχέση

$$\text{Var} [\hat{f}_{xx}(\lambda)] \cong \frac{f_{xx}^2(\lambda)}{M} \sum_{\tau=1}^M w_\tau^2 \quad (8.13)$$



**Σχήμα 8.2.** Παράθυρα Tukey και Parzen.

Για μεγάλο  $M$  η  $\text{Var} [\hat{f}_{xx}(\lambda)]$  τείνει στο μηδέν, άρα ο εκτιμητής  $\hat{f}_{xx}(\lambda)$  είναι συνεπής εκτιμητής του φάσματος ισχύος  $[E\{f_{xx}(\lambda)\} \cong f_{xx}(\lambda)]$ .

Όταν έχουμε στη διάθεσή μας πολλές παρατηρήσεις για τη χρονοσειρά, μπορούμε το συνολικό μήκος  $T$  του διαστήματος που παρατηρείται η χρονοσειρά να το χωρίσουμε σε ανεξάρτητα υποδιαστήματα μήκους  $V$ , δηλαδή  $T = LV$  όπου  $L$  είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων. Σε κάθε υποδιάστημα μπορούμε να υπολογίσουμε το περιοδόγραμμα ως εξής

$$I_{xx}^{(V)}(\lambda, j) = \frac{1}{2\pi V} |d(\lambda, j)|^2, \quad j = 0, 1, \dots, L-1 \quad (8.14)$$

Ένας εκτιμητής για το φάσμα ισχύος μπορεί τώρα να υπολογισθεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$\tilde{f}_{xx}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} I_{xx}^{(j)}(\lambda, j) \quad (8.15)$$

Η μέθοδος αυτή εκτίμησης του φάσματος ισχύος χρησιμοποιείται στο Κεφ. 6 για τον υπολογισμό του φάσματος ισχύος του μαγνητοεγκεφαλογραφήματος ενός ατόμου.