Ορισμοί

- Μια *βαθμωτή συνάρτηση* V(x) (των καταστάσεων x) λέγεται ότι είναι θετικά ορισμένη σε μια περιοχή Ω (η οποία **περικλείει** την αρχή του χώρου κατάστασης) αν V(x) > 0 για όλες τις μη μηδενικές καταστάσεις x στην περιοχή Ω και V(0) = 0.

  Παράδειγμα

  Έστω $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ το δυσδιάστατο διάνυσμα κατάστασης

  η $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ είναι θετικά ορισμένη ομοίως η $V(x) = x_1^2 + \dfrac{2x^2}{1 + x_2^2}$

- Μια *χρονικά μεταβαλλόμενη βαθμωτή συνάρτηση* V(x,t) λέγεται θετικά ορισμένη σε μια περιοχή Ω (που περιέχει την αρχή των αξόνων) αν είναι φραγμένη από κάτω από μια χρονικά αμετάβλητη θετικά ορισμένη συνάρτηση, δηλαδή αν υπάρχει μια θετικά ορισμένη συνάρτηση V(x) τέτοια ώστε $V(x,t) > V(x) \;\; \forall \;\; t \geq t_0$. $V(0,t) = 0 \;\; \forall \;\; t \geq t_0$

Ορισμοί

Μια *βαθμωτή συνάρτηση* λέγεται:

- Αρνητικά ορισμένη αν η $-V(x)$ είναι θετικά ορισμένη
  Παράδειγμα: η $V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2^2)$ είναι αρνητικά ορισμένη
- Θετικά ημιορισμένη αν είναι θετική σε όλες τις καταστάσεις στην περιοχή Ω εκτός από την αρχή των αξόνων και σε ορισμένες άλλες καταστάσεις όπου αυτή μηδενίζεται.
  Παράδειγμα: η $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ είναι θετικά ημιορισμένη για $V(x) > 0$ εκτός από $x_1 = x_2 = 0$ $(x = 0)$ και $x_1 = -x_2$
- Αρνητικά ημιορισμένη αν η $-V(x)$ είναι θετικά ημιορισμένη.
- Αόριστη αν στην περιοχή Ω λαμβάνει και θετικές και αρνητικές τιμές ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η περιοχή Ω
  Παράδειγμα: η $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ είναι αόριστη.

Τετραγωνικές μορφές

- Για ένα *πραγματικό* και *συμμετρικό* πίνακα P και ένα πραγματικό n-διάστατο διάνυσμα x η βαθμωτή συνάρτηση:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{με } \alpha_{ji} = \alpha_{ij}$$

καλείται τετραγωνική μορφή. Οποιαδήποτε τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί σαν $x^T Px$. *Ο πίνακας P είναι υποχρεωτικά συμμετρικός στις τετραγωνικές μορφές*

- Για Hermitian πίνακα P και ένα μιγαδικό n-διάστατο διάνυσμα η βαθμωτή συνάρτηση

$$V(x) = x^* \mathrm{A} x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \bar{x}_i x_j \qquad \alpha_{\mathrm{ij}} = \bar{\alpha}_{ji}$$

καλείται μιγαδική τετραγωνική μορφή. *<u>Προσοχή</u> η βαθμωτή ποσότητα x^* A x είναι πραγματική*

$$\overline{\mathrm{x}^* \mathrm{A}\, x} = x^T \bar{\mathrm{A}}\, \bar{x} = (x^T \bar{\mathrm{A}}\, \bar{x})^T = \bar{x}^T \bar{\mathrm{A}}^T x = x^* \mathrm{A}\, x$$

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση:
  $V(x) = x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_1\,x_3 + x_2^2 + 8\,x_3^2$ γράφεται στη μορφή $x^T P\,x$ ως εξής:

$$V(x) = x_1^2 - x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + x_2^2 + 8\,x_3^2 - x_2\,x_1 + 2\,x_3\,x_1 =$$

$$= x_1\,(\,x_1 - x_2 + 2\,x_3) + x_2\,(\,x_2 - x_1\,) + x_3\,(\,8\,x_3 + 2\,x_1\,) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 & -x_1 + x_2 & 2x_1 + 8x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Κριτήριο Sylvester

- *Αναγκαία και ικανή συνθήκη* για να είναι ο τετραγωνικός πίνακας Α και κατά συνέπεια η αντίστοιχη τετραγωνική ή ερμιτιανή μορφή θετικά ορισμένη είναι για τις ακόλουθες διαδοχικές ορίζουσες να ισχύει:

$$D_1 = \alpha_{11} \rangle 0, D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \rangle 0, D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{31} \end{vmatrix} \rangle 0, \ldots, D_n = |\mathrm{A}| \rangle 0$$

- Για να είναι οι μορφές αρνητικά ορισμένες θα πρέπει: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$,… δηλαδή $D_n > 0$ (n άρτιο), $D_n < 0$ (n περιττό)
- Για να είναι θετικά ημιορισμένες: $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, …, $D_n \geq 0$
- Για να είναι αρνητικά ημιορισμένες: $D_1 \leq 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 \leq 0$,…

Παράδειγμα

- Η ακόλουθη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη

$$V(x) = 10\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 - 2\,x_2\,x_3 - 4\,x_1\,x_3 = 10\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + x_1\,x_2 + x_2\,x_1 - x_2\,x_3 - x_3\,x_2 - 2\,x_1\,x_3 - 2\,x_3\,x_1$$

$$= x_1\,(10\,x_1 + x_2 - 2\,x_3) + x_2\,(\,4\,x_2 + x_1 - x_3) + x_3\,(\,x_3 - x_2 - 2\,x_1)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε (Sylvester) ότι:

$$D_1 = 10 \rangle 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 \rangle 0,\ D_3 = 30 + 1 - 14 = 17 \rangle 0$$

άρα η V(x) είναι θετικά ορισμένη.

Κριτήριο Ιδιοτιμών

- Ένας πίνακας K (και κατά συνέπεια *η τετραγωνική του μορφή*) είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (αρνητικές) και αόριστος όταν έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές όλες μη μηδενικές. Ο K είναι ημιορισμένος όταν έχει τουλάχιστον μια μηδενική ιδιοτιμή.

Πράγματι: Έστω λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα K και x_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$Kx_i = \lambda_i x_i \Rightarrow x_i^T K x_i = \lambda_i x_i^T x_i$$

όπου το $x_i^T x_i > 0$

Άσκηση

Να εξεταστεί (και με τα δύο κριτήρια) το πρόσημο του παρακάτω πίνακα (και της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$