

Ορισμοί

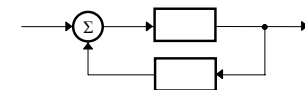
- Μια *βαθμωτή συνάρτηση* $V(x)$ (των καταστάσεων x) λέγεται ότι είναι **θετικά ορισμένη** σε μια περιοχή Ω (η οποία **περικλείει** την αρχή του χώρου κατάστασης) αν $V(x) > 0$ για όλες τις μη μηδενικές καταστάσεις x στην περιοχή Ω και $V(0) = 0$.

Παράδειγμα

Έστω $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ το δυσδιάστατο διάνυσμα κατάστασης

η $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ είναι **θετικά ορισμένη** ομοίως η $V(x) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$

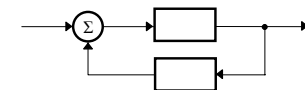
- Μια *χρονικά μεταβαλλόμενη βαθμωτή συνάρτηση* $V(x,t)$ λέγεται **θετικά ορισμένη** σε μια περιοχή Ω (που περιέχει την αρχή των αξόνων) αν είναι φραγμένη από κάτω από μια χρονικά αμετάβλητη θετικά ορισμένη συνάρτηση, δηλαδή αν υπάρχει μια **θετικά ορισμένη συνάρτηση** $V(x)$ τέτοια ώστε $V(x,t) > V(x) \quad \forall \quad t \geq t_0$. $V(0,t) = 0 \quad \forall \quad t \geq t_0$



Ορισμοί

Μια *βαθμωτή συνάρτηση* λέγεται:

- **Αρνητικά ορισμένη** αν η $-V(x)$ είναι θετικά ορισμένη
Παράδειγμα: η $V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2^2)$ είναι αρνητικά ορισμένη
- **Θετικά ημιορισμένη** αν είναι θετική σε όλες τις καταστάσεις στην περιοχή Ω εκτός από την αρχή των αξόνων και σε ορισμένες άλλες καταστάσεις όπου αυτή μηδενίζεται.
Παράδειγμα: η $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ είναι θετικά ημιορισμένη για $V(x) > 0$ εκτός από $x_1 = x_2 = 0$ ($x = 0$) και $x_1 = -x_2$
- **Αρνητικά ημιορισμένη** αν η $-V(x)$ είναι θετικά ημιορισμένη.
- **Αόριστη** αν στην περιοχή Ω λαμβάνει και θετικές και αρνητικές τιμές ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η περιοχή Ω
Παράδειγμα: η $V(x) = x_1x_2 + x_2^2$ είναι αόριστη.



Τετραγωνικές μορφές

- Για ένα *πραγματικό* και *συμμετρικό* πίνακα P και ένα πραγματικό n -διάστατο διάνυσμα x η βαθμωτή συνάρτηση:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \text{με } a_{ji} = a_{ij}$$

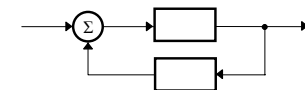
καλείται **τετραγωνική μορφή**. Οποιαδήποτε τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί σαν $x^T P x$. *Ο πίνακας P είναι υποχρεωτικά συμμετρικός στις τετραγωνικές μορφές*

- Για Hermitian πίνακα P και ένα μιγαδικό n -διάστατο διάνυσμα x η βαθμωτή συνάρτηση

$$V(x) = x^* A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

καλείται **μιγαδική τετραγωνική μορφή**. *Προσοχή η βαθμωτή ποσότητα $x^* A x$ είναι πραγματική*

$$\overline{x^* A x} = x^T \bar{A} \bar{x} = (x^T \bar{A} \bar{x})^T = \bar{x}^T \bar{A}^T x = x^* A x$$



Παράδειγμα

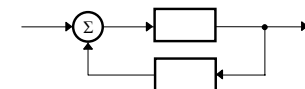
- Η συνάρτηση:

$V(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2$ γράφεται στη μορφή $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2 - x_2x_1 + 2x_3x_1 = \\ &= x_1(x_1 - x_2 + 2x_3) + x_2(x_2 - x_1) + x_3(8x_3 + 2x_1) = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 & -x_1 + x_2 & 2x_1 + 8x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

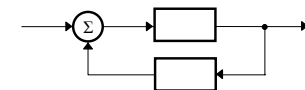


Κριτήριο Sylvester

- *Αναγκαία και ικανή συνθήκη* για να είναι ο τετραγωνικός πίνακας A και κατά συνέπεια η αντίστοιχη τετραγωνική ή ερμιτιανή μορφή **θετικά ορισμένη** είναι για τις ακόλουθες διαδοχικές ορίζουσες να ισχύει:

$$D_1 = \alpha_{11} > 0, D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n = |A| > 0$$

- Για να είναι οι μορφές **αρνητικά ορισμένες** θα πρέπει: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0, \dots$ δηλαδή $D_n > 0$ (n άρτιο), $D_n < 0$ (n περιτό)
- Για να είναι **θετικά ημιορισμένες**: $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, \dots , $D_n \geq 0$
- Για να είναι **αρνητικά ημιορισμένες**: $D_1 \leq 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 \leq 0, \dots$



Παράδειγμα

- Η ακόλουθη τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη

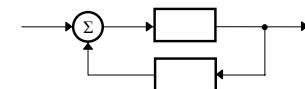
$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= 10 x_1^2 + 4 x_2^2 + x_3^2 + 2 x_1 x_2 - 2 x_2 x_3 - 4 x_1 x_3 = 10 x_1^2 + \\ &4 x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 - x_2 x_3 - x_3 x_2 - 2 x_1 x_3 - 2 x_3 x_1 \\ &= x_1 (10 x_1 + x_2 - 2 x_3) + x_2 (4 x_2 + x_1 - x_3) + x_3 (x_3 - x_2 - 2 x_1) \\ &= \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε (Sylvester) ότι:

$$D_1 = 10 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 > 0, D_3 = 30 + 1 - 14 = 17 > 0$$

άρα η $V(\mathbf{x})$ είναι **θετικά ορισμένη**.



Κριτήριο Ιδιοτιμών

- Ένας πίνακας K (και κατά συνέπεια *η τετραγωνική του μορφή*) είναι **θετικά** (**αρνητικά**) ορισμένος όταν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (αρνητικές) και **αόριστος** όταν έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές όλες μη μηδενικές. Ο K είναι **ημιορισμένος** όταν έχει τουλάχιστον μια μηδενική ιδιοτιμή.

Πράγματι: Έστω λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα K και x_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$Kx_i = \lambda_i x_i \Rightarrow x_i^T Kx_i = \lambda_i x_i^T x_i$$

όπου το $x_i^T x_i > 0$

Άσκηση

Να εξεταστεί (και με τα δύο κριτήρια) το πρόσημο του παρακάτω πίνακα (και της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

