Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Προβλημα Βήματος 1.

Σχεδιασμός ελεγκτή για το Βήμα 1 (δες προηγούμενη διάλεξη), δηλαδή για το σύστημα:

$\dot{x} = Ax + Bu$

Να σχεδιασθεί ελεγκτής *u=f(x)*, έτσι ώστε $x(t) \to 0$

Έχουμε ότι

$\dot{x} = Ax + Bf(x) = g(x)$

Επίσης, έστω ότι $x(0) = x_0$

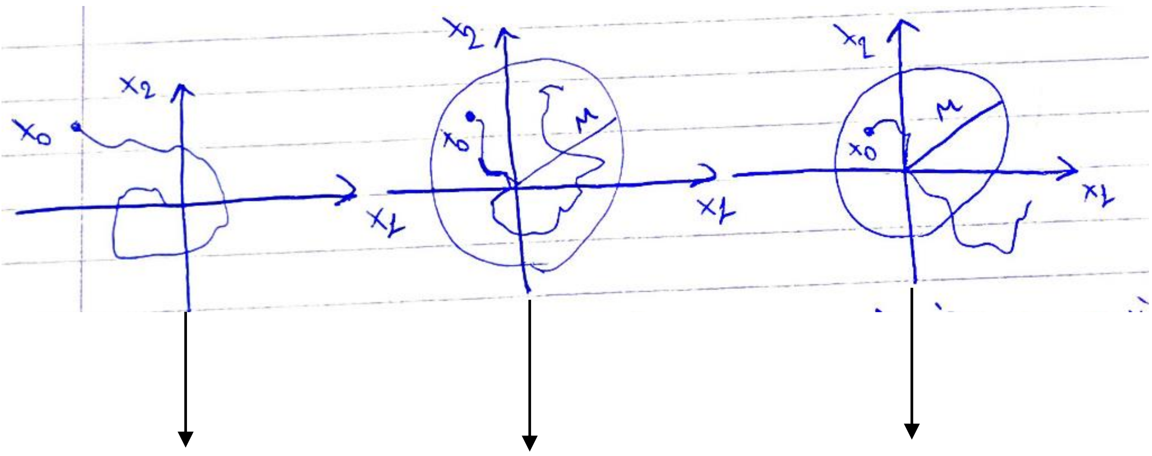
Ευστάθεια συστήματος

Το παραπάνω σύστημα είναι

ΑΕ ⟶ Ασυμπτωματικά Ευσταθές, όταν $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\ \forall x_0$

Ε ⟶ Ευσταθές, όταν $|x(t)| < M < \infty,\ \forall t, \forall x_0$

Α ⟶ Ασταθές, όταν $|x(t)| = \infty,\ \forall t$



ΑΕ
Από όπου και να ξεκινήσω πάω στο 0.

Ε
Δεν πάει στο 0, αλλά μένει μέσα στον κύκλο

Α
Ότι και να κάνω βγαίνει από τον κύκλο.

Αρά, το πρόβλημα του Βήματος 1 λύνεται αν καταφέρουμε να σχεδιάσουμε το έλεγκτή *u(t)=f(x(t))* έτσι ώστε το παρακάτω συστήμα να είναι ΑΕ

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bf(x)}$$

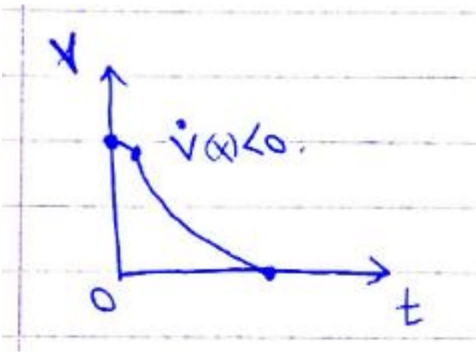
Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov

Το σύστημα $\dot{x} = g(x)$ είναι ΑΕ

$$\boldsymbol{\alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu}$$

$\exists V: R^n \to$ R που ικανοποιεί τις παρακάτω 2 συνθήκες

- $V(x) > 0 \ \ \forall x \neq 0$ ***και*** $V(x) = 0$ μόνο αν $x = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\dot{V}(x) < 0 \ \ \forall x \neq 0$ ***και*** $\dot{V}(x) = 0$ μόνο αν $x = 0$



Όταν $\dot{V}(x) = 0$ τότε x=0

Παραδείγμα

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = -3x, \\ &V = \frac{1}{2}x^2 \\ &\dot{V} = \frac{1}{2}2x\dot{x} = x\dot{x} = -3x^2 \end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα είναι ΑΕ.

Η V πληρεί και τις 2 προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Παραδείγμα

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x_1} = x_2 \\ &\dot{x_2} = -x_1^3 - x_2^3 \end{aligned}\right\}$$

Για να εξετάσω αν το σύστημα είναι ΑΕ πρέπει να δοκιμάσω πολλές διαφορετικές συναρτήσεις $V(x)$

Η συνάρτηση

$$V = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

πληροί την πρώτη προϋπόθεση του θεωρήματος, αφού

$V(x) > 0$ για $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$

Η δεύτερη προϋπόθεση, όμως, δεν πληρείται γιατί

$$\dot{V} = \frac{1}{4}4x_1^3\dot{x_1} + \frac{1}{2}2x_2\dot{x_2} = x_1^3x_2 + x_2(-x_1^3 - x_2^3) = x_1^3x_2 - x_1^3x_2 - x_2^4 = -x_2^4$$

αφού $\dot{V} = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $\mathrm{x} = 0$ (π.χ., $\dot{V} = 0$ για $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq 0$).

Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov για Γραμμικά Συστήματα

Έστω ότι στο πρόβλημα του βήματος 1, ο έλεγκτης είνα γραμμικός, δηλαδή για το σύστημα

$\dot{x} = Ax + Bu$

ο ελεγκτής έχει την μορφή u=Kx για κάποιο σταθερό πίνακα K. (Προσοχή στις διαστάσεις: αν $x \in R^n, u \in R^m$ τότε $K \in R^{mxn}$)

Το σύστημα **κλειστού βρόχου** (δηλαδή μετά την εφαρμογή του ελεγκτή u=Kx) παίρνει τη μορφή

$\dot{x} = A_{cl}x$
$A_{cl} = A + BK$

Το θεώρημα ευστάθειας Lyapunov σε αυτή την περίπτωση, γίνεται ως εξής:

Το σύστημα $\dot{x} = A_{cl}x$ είναι ΑΕ

$$\boldsymbol{\alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{o}\nu o\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu}$$

$\exists$ πίνακες P, Q τέτοιοι ώστε

- $P > 0, Q > 0$ (δηλαδή είνα θετικά ορισμένοι)
- $PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q$

Απόδειξη

Έστω $V = x^T P x$, η οποία πληροί την πρώτη προϋπόθεση του θεωρήματος αφού ο P είναι θετικά ορισμένος.

Όσον αφορά στην δεύτερη προϋπόθεση, έχουμε ότι (ο P είναι σταθερός, άρα $\dot{P} = 0$)

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x} = (A_{cl}x)^T P x + x^T P A_{cl} x =$$

$$x^T A_{cl}^T P x + x^T P A_{cl} x =$$

$$x^T (\underbrace{A_{cl}^T P x + P A_{cl}}_{PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q} x) = -x^T Q x$$

και, άρα, πληρείται και η δεύτερη προϋπόθεση του θεωρήματος, αφού ο Q είναι θετικά ορισμένος.

Παραδείγμα

$\dot{x} = A_{cl}x,\ \ A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$V = x^T Q x = x_1^2 + x_2^2 > 0$ για $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$

Ψάχνουμε ένα πίνακα $P > 0$, ο οποίος ικανοποιεί

$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q$

Έστω $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix},\ \ P = P^T$ συμμετρικός

$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & -P_1 - P_2 \\ P_3 & -P_2 - P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 & P_3 \\ -P_{1_{P_2}} & -P_2 - P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2P_2 & -P_1 - P_2 + P_3 \\ -P_1 - P_2 + P_3 & -2P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &2P_2 = -1 \\ &-P_1 - P_2 + P_3 = 0 \\ &-2P_2 - 2P_3 = -1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &P_2 = -\frac{1}{2} \\ &P_1 + P_2 = P_3 \\ &P_2 + P_3 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &P_2 = -\frac{1}{2} \\ &P_1 = 1.5 \\ &P_3 = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Πρέπει ο $P>0$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$x^T P x = [x_1\ \ x_2] \begin{bmatrix} 1.5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1.5x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 =$$

$$= 1.5x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 0.5x_2^2 + (0.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - x_1x_2) =$$

$$= x_1^2 + 0.5x_2^2 + 0.5(x_1 - x_2)^2 > 0 \text{ για } x_1 \neq 0 \text{ και } x_2 \neq 0$$

Αρα ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος.

Συνεπώς το σύστημα είναι ΑΕ.

Παραδείγμα

$$\dot{x} = A_{cl}x, \;\; A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \;\; P = P^T \; συμμετρικός$$

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q \;\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_2 \\ 0 & -P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_2 & -P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_2 \\ -P_2 & -2P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\mathbf{0 = -1} \\ &-P_2 = 0 \\ &-2P_3 = -1 \end{aligned}$$

<u>Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δεν λύνεται, οπότε το σύστημα δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύστημα είναι ΑΕ</u>