ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ JORDAN

Προκαταρτικά:

Α) Μηδενικός χώρος (N) πίνακα Α

Ο χώρος που περιέχει όλα τα διανύσματα $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ για τα οποία ισχύει $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

Β) Μηδενικότητα ν(Α) του πίνακα Α

Το πλήθος των διανυσμάτων του μηδενικού χώρου

Γ) Ισχύει ότι

$\rho(A) + \nu(A) = n$,

Όπου $\rho(A) = rank(A)$ (ο βαθμός (ή τάξη) του Α = το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του πίνακα) και n η διάσταση του πίνακα

Ορισμός 1.

Ένα διάνυσμα **v** που συνδέεται με την ιδιοτιμή λ λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα βαθμού k του πίνακα **A** αν και μόνο αν

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

και

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Σημειώστε ότι εάν $k = 1$, ο ορισμός 1 ανάγεται στις $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, το οποίο είναι ο ορισμός ενός απλού ιδιοδιανύσματος. Ως εκ τούτου ο όρος "γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα" είναι δικαιολογημένος.

Υποθέτουμε ότι το **v** είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα βαθμού k που συνδέεται με την ιδιοτιμή λ. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_k &\overset{\Delta}{=} \mathbf{v} \\
\mathbf{v}_{k-1} &\overset{\Delta}{=} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k \\
\mathbf{v}_{k-2} &\overset{\Delta}{=} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{k-1} \qquad (1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{και} \quad \mathbf{v}_1 &\overset{\Delta}{=} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Αυτό το σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ ονομάζεται *αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων* μήκους k.

Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{N}_i$ συμβολίζει το μηδενικό χώρο του $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$, δηλαδή το $\mathcal{N}_i$ αποτελείται από όλα τα **x** έτσι ώστε $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Είναι σαφές ότι αν το **x** ανήκει στον $\mathcal{N}_i$, τότε ανήκει και στον $\mathcal{N}_{i+1}$. Ως εκ τούτου το $\mathcal{N}_i$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{N}_{i+1}$, δηλαδή $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_{i+1}$. Σαφώς, το **v** που καθορίζεται με βάση την (1) ανήκει στον $\mathcal{N}_k$ αλλά όχι στον $\mathcal{N}_{k-1}$. Στην πραγματικότητα, για $i = 1,2,...,k$, το $\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{v}$ που προσδιορίζεται από την (1) ανήκει στον $\mathcal{N}_i$ αλλά όχι στον $\mathcal{N}_{i-1}$. Πράγματι, έχουμε

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

και

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{i-1}\mathbf{v}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{i-1}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

ως εκ τούτου το **v** ανήκει στον $\mathcal{N}_i$ αλλά όχι στον $\mathcal{N}_{i-1}$.

Έστω ότι ο $\mathbf{A}$ είναι ένας *nxn* πίνακας και έχει την ιδιοτιμή λ με πολλαπλότητα m. Στη συνέχεια μελετάμε πώς να βρούμε m γραμμικώς ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ που σχετίζονται με το λ. Αυτό επιτυγχάνεται ερευνώντας ***αλυσίδες γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων διαφόρων μηκών***.

Πρώτα υπολογίζουμε τις τάξεις του $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, για $i = 0,1,2,...$, μέχρι να γίνει $\rho([\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]^k) = n - m$.

Για λόγους ευκολίας δεν αναφερόμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο πίνακα $\mathbf{A}$ αλλά υποθέτουμε ότι αυτός είναι τέτοιος ώστε $n = 10$, $m = 8$, $k = 4$, και ο βαθμός του $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, για $i = 0,1,2,3,4$, είναι όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Η μηδενικότητα ν_i είναι η διάσταση του μηδενικού χώρου $\mathcal{N}_i$, και είναι ίση (σύμφωνα με τα προκαταρτικά) με $\nu_i = n - \rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$. Λόγω του $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2 \subset \cdots$, έχουμε $0 = \nu_0 \le \nu_1 \le \nu_2 \le \cdots \le \nu_k = m$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να βρούμε $m = 8$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ που συνδέονται με την πολλαπλή (με πολλαπλότητα $m = 8$) ιδιοτιμή λ. Λόγω του $\mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_4$ και $\nu_4 - \nu_3 = 1$, μπορούμε να βρούμε ένα και μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα $\mathbf{u}$ στο $\mathcal{N}_4$ αλλά όχι στο $\mathcal{N}_3$ έτσι ώστε

$$\mathbf{B}^4\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B}^3\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

όπου $\mathbf{B} \overset{\Delta}{=} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Από αυτό το $\mathbf{u}$, μπορούμε, σύμφωνα με την (1), να παράγουμε μια αλυσίδα τεσσάρων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων ως εξής:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}^3\mathbf{u} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{B}^2\mathbf{u} \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{u}_4 = \mathbf{u} \qquad \mathbf{(2)}$$

Πίνακας 1 Αλυσίδες γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, όπου $\mathbf{B} \overset{\Delta}{=} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

$\rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^0 = 10$	$\nu_0 = 0$				
$\rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^1 = 7$	$\nu_1 = 3$				
$\rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2 = 4$	$\nu_2 = 6$				
$\rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3 = 3$	$\nu_3 = 7$				
$\rho(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^4 = 2$	$\nu_4 = 8$				

$\nu_4 - \nu_3 = 1$	$\nu_3 - \nu_2 = 1$	$\nu_2 - \nu_1 = 3$	$\nu_1 - \nu_0 = 3$	Αριθμός των ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων στο $\mathcal{N}_i$ και όχι στο $\mathcal{N}_{i-1}$
		$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$ $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$	$\mathbf{w}_1 = \mathbf{Bw}$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{Bv}$	Δύο αλυσίδες με μήκος 2
$\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}$	$\mathbf{u}_3 = \mathbf{Bu}$	$\mathbf{u}_2 = \mathbf{B}^2\mathbf{u}$	$\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}^3\mathbf{u}$	Μία αλυσίδα με μήκος 4

Λόγω του $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_3$ και $\nu_3 - \nu_2 = 1$, υπάρχει μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα στον $\mathcal{N}_3$ που δεν ανήκει στον $\mathcal{N}_2$. Το u3 στην (2) είναι ένα τέτοιο διάνυσμα, επομένως δεν μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε άλλο γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα που να ανήκει στον $\mathcal{N}_3$ και να μην ανήκει στον $\mathcal{N}_2$. Θεωρούμε τώρα τα διανύσματα που ανήκουν στον $\mathcal{N}_2$ αλλά όχι στον $\mathcal{N}_1$. Επειδή $\nu_2 - \nu_1 = 3$, υπάρχουν τρία τέτοια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δεδομένου ότι το $\mathbf{u}_2$ στην (2) είναι ένα από αυτά, μπορούμε να βρούμε δύο διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ έτσι ώστε τα $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και

$$\mathbf{B}^2\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{Bv} \neq \mathbf{0}$$

και

$$\mathbf{B}^2\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{Bw} \neq \mathbf{0}$$

Από το **v** και το **w**, μπορούμε να παράγουμε δύο αλυσίδες γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 2 όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1. Όπως μπορεί να φανεί από τον Πίνακα 1, ο αριθμός των διανυσμάτων στο N_1 είναι ίσος με $v_1 - v_0 = 3$, ως εκ τούτου δεν υπάρχει ανάγκη να αναζητηθεί άλλο διάνυσμα στο $\mathcal{N}_1$. Αυτό ολοκληρώνει την αναζήτηση οκτώ γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του **A** που συνδέονται με το λ.

Θεώρημα 1
Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του **A** που σχετίζονται με το λ που παρήχθη δεδομένου του Πίνακας 2-2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. (Η απόδειξη παραλείπεται)

Θεώρημα 2
Τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του **A** που συνδέονται με διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (Η απόδειξη παραλείπεται)

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας **A** μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας σε πίνακα **Jordan**, όπου ο πίνακας μετασχηματισμού ομοιότητας είναι ο $\mathbf{S} \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$.
Έχει δηλαδή ως στήλες του τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα των 3 αλυσίδων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων που παράχθηκαν παραπάνω καθώς και από τα 2 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ τα οποία είναι τα ιδιοδιανύσματα του **A** που σχετίζονται με άλλες διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_9 και λ_{10}.

Τώρα, για την πρώτη αλυσίδα τεσσάρων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων ξέρουμε από την (1) ότι
$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2$, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$, και τελικά $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$,
έχουμε επομένως

$$\mathbf{Au}_1 = \lambda\mathbf{u}_1 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Au}_2 = \mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{u}_2 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Au}_3 = \mathbf{u}_2 + \lambda\mathbf{u}_3 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \text{ και}$$

$$\mathbf{Au}_4 = \mathbf{u}_3 + \lambda\mathbf{u}_4 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

Συνεχίζοντας ομοίως και με τις άλλες 2 αλυσίδες γενικευμένων ιδιονυσμάτων καθώς και με τα 2 άλλα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_9 και λ_{10}, μπορούμε επίσης να πάρουμε τις σχέσεις

$$\mathbf{Av}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Av}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Aw}_1 = \lambda\mathbf{w}_1 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Aw}_2 = \mathbf{w}_1 + \lambda\mathbf{w}_2 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \lambda\mathbf{x}_1 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 & 0\end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Ax}_2 = \lambda\mathbf{x}_2 = \mathbf{S}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10}\end{bmatrix}^T$$

Οι δέκα παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν στην συμπαγή πινακοδιανυσματική μορφή

$$\mathbf{AS}=\mathbf{SJ}\ , \qquad \mathbf{(3)}$$

όπου

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\\\hline\end{array} & \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \begin{array}{cc|}\lambda&1\\0&\lambda\\\hline\end{array} & \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\begin{array}{cc|}\lambda&1\\0&\lambda\\\hline\end{array}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\begin{array}{c|}\lambda_9\\\hline\end{array}&0\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&0&\begin{array}{c|}\lambda_{10}\\\hline\end{array}\end{bmatrix}$$

Αυτός είναι ένας πίνακας μορφής Jordan. Από την (3) προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathbf{A}=\mathbf{SJS}^{-1} \text{ και ισοδύναμα } \mathbf{J}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \qquad \mathbf{(4)}$$

Δηλαδή, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα Jordan αν πρώτα σχηματίσουμε τον πίνακα **S** με την βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων και των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα **A** και στη συνέχεια εφαρμόσουμε την (4).
ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν θέλουμε μόνο να πάρουμε τον πίνακα Jordan και δεν μας ενδιαφέρει ο **S,** δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε επακριβώς τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Αρκεί να παρατηρήσουμε τα εξής.

1) Το άθροισμα των διαστάσεων των Jordan υπο-πινάκων ισούται με την πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.
2) Η διάσταση του κάθε υπο-πίνακα καθορίζεται από το μήκος της παραγόμενης γενικευμένης αλυσίδας
3) Η μηδενικότητα ν_1 του χώρου $\mathcal{N}_1$, δηλαδή η διάσταση του μηδενικού χώρου του πίνακα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^1$, καθορίζει το πλήθος των υπο-πινάκων Jordan.

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, ο αριθμός των Jordan blocks που σχετίζεται με το λ είναι ίσος με $\nu_1 = 3$, δηλαδή το πλήθος των υποπινάκων είναι 3. Η διάσταση του κάθε υποπίνακα καθορίζεται από τη διαδικασία προσδιορισμού των αλυσίδων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω.