Γιάννη Σ. Μπούταλη
Αναπληρωτή Καθηγητή Δ.Π.Θ

ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

βοηθητικές σημειώσεις στο μάθημα ΣΑΕ ΙΙ

Ξάνθη, Μάιος 2007

ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτυχθεί η γενική λύση της εξίσωσης κατάστασης ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος. Αρχικά, γίνεται αναφορά στην ομογενή εξίσωση και έπειτα στη μη ομογενή.

Λύση της ομογενούς εξίσωσης κατάστασης.

Πριν την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων διανυσμάτων – πινάκων, ας γίνει μια ανασκόπηση στην επίλυση των βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = ax \qquad (1)$$

Στην επίλυση αυτής της εξίσωσης, μπορεί να υποτεθεί μια λύση x(t) της μορφής

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^2 + \ldots \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στην εξίσωση (1) το αποτέλεσμα είναι

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + kb_k t^{k-1} + \ldots = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^2 + \ldots) \qquad (3)$$

Εάν η υποτιθέμενη λύση είναι πράγματι η σωστή, τότε η εξίσωση (3) πρέπει να ισχύει για κάθε t. Επομένως, εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων προκύπτει

$$b_1 = ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2}ab_1 = \frac{1}{2}a^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3}ab_2 = \frac{1}{3\times 2}a^3 b_0$$

.

.

.

$$b_k = \frac{1}{k!}a^k b_0$$

.

.

.

Η τιμή του b_0 καθορίζεται αντικαθιστώντας το t=0 στην εξίσωση (2), δηλαδή

$$x(0) = b_0$$

Επομένως, η λύση x(t) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$x(t) = (1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + ... + \frac{1}{k!}a^k t^k + ...)x(0) = e^{at}x(0)$$

Ακολουθεί τώρα η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης διανυσμάτων - πινάκων

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{4}$$

όπου, **x** είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα και **A** ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας.

Σε αναλογία με τη βαθμωτή περίπτωση, γίνεται η υπόθεση ότι η λύση είναι στη μορφή μιας σειράς διανυσμάτων και δυνάμεων του t, δηλαδή

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + ... + \mathbf{b}_k t^2 + ... \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη λύση στην εξίσωση (4) το αποτέλεσμα είναι

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + ... + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + ... = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + ... + \mathbf{b}_k t^2 + ...) \tag{6}$$

Εάν η υποτιθέμενη λύση είναι πράγματι η σωστή, τότε η εξίσωση (6) πρέπει να ισχύει για κάθε t. Επομένως, εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του t και στα δύο μέλη προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\
\mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
\mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το t=0 στην εξίσωση (5) συνεπάγεται πως

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$$

Επομένως, η λύση x(t) Μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + ... + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + ...)\mathbf{x}(0)$$

Η έκφραση της παρένθεσης του δεξιού σκέλους της τελευταίας εξίσωσης είναι ένας $n \times n$ πίνακας. Λόγω της ομοιότητας με την σειρά των άπειρων δυνάμεων για ένα βαθμωτό εκθετικό, ο πίνακας ονομάζεται εκθετικός και γράφεται

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + ... + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + ...) = e^{\mathbf{A}t}$$

Σε σχέση με τον εκθετικό πίνακα, η λύση της εξίσωσης (4) μπορεί να γραφτεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{7}$$

Επειδή ο εκθετικός πίνακας είναι πολύ σημαντικός για την ανάλυση στο χώρου κατάστασης, παρακάτω θα εξετασθούν οι ιδιότητές του.

Εκθετικός πίνακας.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ο εκθετικός πίνακας ενός $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

συγκλίνει πλήρως για όλα τα πεπερασμένα t. Λόγω της σύγκλισης των άπειρων σειρών $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$, οι σειρές μπορούν να διαφοριστούν όρος προς όρο και να δώσουν

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^k t^{k-1} + ... \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1} + ...) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + ... + \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1} + ...)\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \end{aligned}$$

Ο εκθετικός πίνακας έχει την παρακάτω ιδιότητα

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = (\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!})(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^h s^h}{h!}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{k+h} t^k s^h}{k!\,h!}$$

Έστω k+h=m. Τότε

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\mathbf{A}^m \frac{t^k s^{m-k}}{k!(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathbf{A}^m (t+s)^m = e^{\mathbf{A}(t+s)}$$

Συγκεκριμένα εάν είναι s=-t, τότε

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Γι' αυτό το λόγο, ο αντίστροφος του $e^{\mathbf{A}t}$ είναι ο $e^{-\mathbf{A}t}$. Επειδή ο αντίστροφος του $e^{\mathbf{A}t}$ υπάρχει πάντα, ο $e^{\mathbf{A}t}$ είναι ομαλός (ή αλλιώς μη ιδιόμορφος –nonsingular).

Είναι πολύ σημαντικό να θυμάται κανείς ότι

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \text{ αν } \mathbf{AB}=\mathbf{BA}$$
$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \text{ αν } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται ως εξής:

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3}{3!}t^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \ldots)(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{B}^3}{3!}t^3 + \ldots) \\ &= \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \mathbf{AB}t^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \frac{\mathbf{A}^2\mathbf{B}}{2!}t^3 + \frac{\mathbf{B}^3}{3!}t^3 + \ldots \end{aligned}$$

Γι' αυτό το λόγο

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} - e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \frac{\mathbf{BA}-\mathbf{AB}}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{BA}^2 + \mathbf{ABA} + \mathbf{B}^2\mathbf{A} + \mathbf{BAB} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{B} - 2\mathbf{AB}^2}{3!}t^3 + \ldots$$

Η διαφορά ανάμεσα στους $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$ και $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ εξαφανίζεται αν οι **A** και **B** είναι αντιμεταθετοί (commute).

Προσέγγιση της λύσης της ομογενούς εξίσωσης κατάστασης με μετασχηματισμό Laplace.

Ας εξεταστεί αρχικά η βαθμωτή περίπτωση :

$$\dot{x} = ax \tag{8}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (8) το αποτέλεσμα είναι

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \tag{9}$$

όπου X(s)= $\mathcal{L}$ [x]. Λύνοντας την (9) ως προς X(s) προκύπτει

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της τελευταίας εξίσωσης δίνει τη λύση

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

Η προηγούμενη προσέγγιση στη λύση της ομογενούς βαθμωτής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να επεκταθεί και στην ομογενή εξίσωση κατάστασης

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{10}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και στο δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης καταλήγει κανείς στην εξής σχέση

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

όπου X(s)= $\mathcal{L}$ [x]. Επομένως

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης με $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του X(s) δίνει τη λύση x(t). Δηλαδή,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) \tag{11}$$

Σημειώστε ότι

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \ldots$$

Επομένως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ δίνει

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \ldots = e^{\mathbf{A}t} \tag{12}$$

(Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ενός πίνακα είναι ένας πίνακας ο οποίος περιλαμβάνει τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace όλων των στοιχείων.) Από τις εξισώσεις (11) και (12), η λύση της εξίσωσης (10) παράγεται ως εξής

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Η σημασία της εξίσωσης (12) έγκειται στο γεγονός ότι παρέχει έναν εύκολο τρόπο για την εύρεση της κλειστής λύσης για έναν εκθετικό πίνακα.

Πίνακας μετάβασης κατάστασης (μεταβατικός πίνακας)

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης κατάστασης μπορεί να γραφτεί ως

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{13}$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{14}$$

όπου $\mathbf{\Phi}(t)$ είναι ένας n×n πίνακας και είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \quad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$$

Για να το επιβεβαιώσετε, σημειώστε ότι

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

και

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (14) είναι η λύση της εξίσωσης (13).

Από τις εξισώσεις (7), (12) και (14) προκύπτει

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]$$

Σημειώστε ότι

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(-t)$$

Από την εξίσωση (14) παρατηρεί κανείς ότι η λύση της εξίσωσης (13) είναι ***ένας απλός μετασχηματισμός*** της αρχικής συνθήκης. Γι' αυτό το λόγο ο μοναδικός πίνακας Φ(t) καλείται ***πίνακας μετάβασης κατάστασης (ή μεταβατικός πίνακας)***. Ο πίνακας μετάβασης κατάστασης περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες σχετικά με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που καθορίζεται από την εξίσωση (13).

- **Παράδειγμα 1**

Βρείτε τον πίνακα μετάβασης κατάστασης Φ(t) του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Βρείτε επίσης τον αντίστροφο $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

Για το σύστημα είναι

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

Ο Φ(t) δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$$

Εφόσον είναι

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$$

ο αντίστροφος του $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ δίνεται από τη σχέση

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Επειδή είναι $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\mathbf{\Phi}(-t)$ ο αντίστροφος $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ προκύπτει ως εξής:

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}2e^{t}-e^{2t} & e^{t}-e^{2t}\\ -2e^{t}+2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

Επίλυση μη ομογενών εξισώσεων κατάστασης.

Αρχικά εξετάζεται η βαθμωτή περίπτωση

$$\dot{x}=ax+bu \tag{15}$$

Η εξίσωση (15) γράφεται ως

$$\dot{x} - ax = bu \tag{16}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με e^{-at} προκύπτει

$$e^{-at}\left[\dot{x}(t) - ax(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-at}x(t)\right] = e^{-at}bu(t)$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την εξίσωση από 0 έως t, το αποτέλεσμα είναι

$$e^{-at}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

ή

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι η απόκριση στην αρχική συνθήκη και ο δεύτερος όρος είναι η απόκριση στην είσοδο u(t).

Ας εξεταστεί τώρα η μη ομογενής εξίσωση η οποία περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{17}$$

όπου **x** είναι ένα διάνυσμα n διαστάσεων, **u** είναι ένα διάνυσμα r διαστάσεων, **A** είναι ένας n×n σταθερός πίνακας και **B** είναι ένας n×r σταθερός πίνακας.
Γράφοντας την εξίσωση (17) ως

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{-\mathbf{A}t}$, προκύπτει

$$e^{-\mathbf{A}t}\left[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη εξίσωση από 0 έως t το αποτέλεσμα έχει ως εξής

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

ή

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{18}$$

Η εξίσωση (19) μπορεί επίσης να γραφτεί και ως

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (19)$$

όπου $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. Η εξίσωση (18) ή η (19) είναι λύσεις της (16). Η λύση $\mathbf{x}(t)$ είναι προφανώς το άθροισμα ενός όρου που αποτελεί την μετάβαση της αρχικής κατάστασης και ενός όρου που προκύπτει από το διάνυσμα εισόδου.

Προσέγγιση της λύσης μη ομογενούς εξίσωσης κατάστασης με μετασχηματισμό Laplace.

Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης κατάστασης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

μπορεί να παραχθεί και με την προσέγγιση του μετασχηματισμού Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace της τελευταίας εξίσωσης οδηγεί στη σχέση

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

ή

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης με $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ προκύπτει

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση που δίνεται στην εξίσωση (12) συνεπάγεται το αποτέλεσμα

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\left[e^{\mathbf{A}t}\right]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}\left[e^{\mathbf{A}t}\right]\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της τελευταίας εξίσωσης μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας τη συνέλιξη ως ακολούθως

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Λύσεις με όρους του $\mathbf{x}(t_0)$.

Μέχρι τώρα θεωρήθηκε ότι ο αρχικός χρόνος ήταν μηδέν. Εάν, παρόλα αυτά, ο αρχικό χρόνος είναι t_0 και όχι μηδέν, τότε η εξίσωση (18), που είναι η λύση της (17) πρέπει να τροποποιηθεί σε

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (20)$$

- **Παράδειγμα 2**

Βρείτε τη χρονική απόκριση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

όπου u(t) είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση που εμφανίζεται για t=0 ή u(t)=1(t)

Για το συγκεκριμένο σύστημα είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ ο οποίος υπολογίστηκε στο παράδειγμα 1 είναι

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Η απόκριση στη μοναδιαία βηματική είσοδο υπολογίζεται ως

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1]d\tau$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + \quad 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - \quad e^{-2t} \end{bmatrix}$$

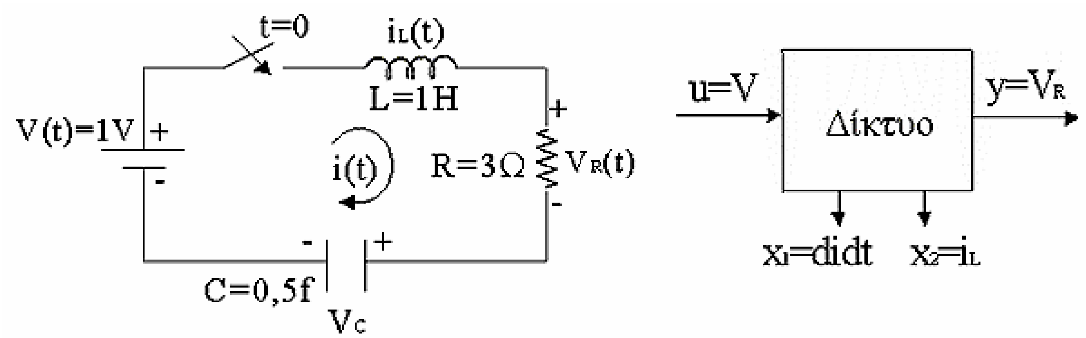
Στην ειδική περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι μηδέν, ή $\mathbf{x}(0)=0$, η λύση $\mathbf{x}(t)$ μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + \quad 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - \quad e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Σχόλιο. Όταν το δυναμικό σύστημα είναι τρίτης ή μεγαλύτερης τάξης, η παραγωγή αναλυτικών λύσεων σε προβλήματα μεταβατικής απόκρισης είναι πολύ κουραστική. Ο καλύτερος τρόπος για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι η χρήση μεθόδων που επιτυγχάνουν τη λύση με τη βοήθεια υπολογιστή.

Παράδειγμα εύρεσης του e^{At} με διάφορες μεθόδους

Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος



Επειδή ισχύουν οι σχέσεις $i = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int idt$ Από το νόμο τάσεων προκύπτει ότι $\frac{di}{dt} + 3i + 2\int_0^t idt = V(t)$ με $x(0)=x_0=[0,1]$ και $u(t)=V(t)$

Ορίζοντας $x_1(t) = \int_0^b i(t)dt,\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = i_L(t) = i(t)$, τότε

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

Θα επιλύσουμε τις εξισώσεις κατάστασης.

<u>Α. Με τη μέθοδο Leverier</u> έχουμε

$$\det(SI\text{-}A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s(s+3)+2 = s^2+3s+2$$, οπότε

$$s_{12} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 1}{2} < {}^{s_1=-1}_{s_2=-2}$$

κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον κανόνα Leverier,

$$\Phi(S) = (SI - A)^{-1} = \frac{SF_1 + F_2}{s^2 + 3s + 2}$$

όπου $F_1=I$ α_1= -ίχνος(AF_1)= -ίχνος(A)= 3

$$F_2 = AF_1 + \alpha_1 I = A + 3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\iota\chi\nu o\varsigma(AF_2)$$

και τέλος, για επαλήθευση

$F_3=A\ F_2+ Q_2I=0$

Ακολούθως αναλύουμε το:

$$\Phi(S)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{S\text{-}\lambda_i}\Phi_i \qquad \lambda_{i,\ i=1,2}=-1,-2$$

$\Phi_i=\lim\limits_{S\to\lambda i}(S-\lambda_i)\Phi(S)$. Δεδομένου ότι $\Phi(S)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$

$$\Phi_1=\lim_{S\to -1}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+2} & \frac{s}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Phi_2=\lim_{S\to -2}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{-2}{s+1} & \frac{s}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Phi(S)=(SI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(S)=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}-\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}-\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

Η λύση της ομογενούς είναι

$$\Phi(t)=L^{-1}\Phi(S)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)=\Phi(t)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

και η γενική λύση

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda$$

όπου $\int_0^t\Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\lambda)}-e^{-2(t-\lambda)}\\ -e^{-(t-\lambda)}+2e^{-2(t-\lambda)}\end{bmatrix}u(\lambda)d\lambda=$

$$\begin{bmatrix}e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}d\lambda\text{-}e^{-2t}\int_0^t e^{2\lambda}d\lambda\\ e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}d\lambda+2e^{-2t}\int_0^t e^{2\lambda}d\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

και τελικά $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

Β. Με τη μέθοδο ιδιοτιμών

Και οι δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου $\lambda_1= -1$, $\lambda_2= -2$ είναι διακριτές
Βρίσκουμε την $Ax_1=\lambda_1 x_1 \Rightarrow (\lambda_1 I-A)x_1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_{11}+x_{12}=0 \Rightarrow x_{11}= - x_{12}$. Έστω $x_{12}=1$

τότε $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ομοίως $Ax_2=\lambda_2 x_2 \Rightarrow (\lambda_2 I-A)x_2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_{22}+2x_{21}=0 \Rightarrow x_{22}= -2x_{21} \Rightarrow$ αν $x_{21}=1$ και $x_{22}= -2$

τότε $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Σχηματίζουμε τον πίνακα $M = [\, x_1 \mid x_2 \,] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Πιστοποιούμε ότι $\det M=1\neq 0$
Οπότε,

$$e^{At} = Me^{A_d t}M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$