Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

2ο Παράδειγμα

Σύστημα περιστρεφόμενου σώματος (π.χ., δορυφόρος, εναέριο όχημα):

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\, w_2\, w_3\\ \alpha_2\;\, w_1\;\, w_3\\ \alpha_3\;\, w_1\;\, w_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\, u_1\\ b_2\, u_2\\ b_3\, u_3\end{bmatrix}$$

$$y = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

όπου w_i, u_i είναι οι 3 γωνίακες ταχύτητες του σώματος και 3 ροπές του σώματος, αντίστοιχα, α_i, b_i είναι σταθερές παράμετροι και y η έξοδος (μέτρηση) του συστήματος.

Έστω:

$$F(w,u) = \begin{bmatrix}a_1 w_2 w_3\\ \alpha_2 w_1 w_3\\ \alpha_3 w_1 w_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1 u_1\\ b_2 u_2\\ b_3 u_3\end{bmatrix}$$

Γραμμικοποίηση συστήματος:

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix} = F(w_0,u_0) + \left[\left.\frac{\partial F}{\partial w}\right|_{(w_0,u_0)}\right](w-w_0) + \left[\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{(w_0,u_0)}\right](u-u_0) + d$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial w}\right] = \begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial w_1} & \frac{\partial F_1}{\partial w_2} & \frac{\partial F_1}{\partial w_3}\\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1} & \frac{\partial F_2}{\partial w_2} & \frac{\partial F_2}{\partial w_3}\\ \frac{\partial F_3}{\partial w_1} & \frac{\partial F_3}{\partial w_2} & \frac{\partial F_3}{\partial w_3}\end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right] = \begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \frac{\partial F_1}{\partial u_3}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \frac{\partial F_2}{\partial u_3}\\ \frac{\partial F_3}{\partial u_1} & \frac{\partial F_3}{\partial u_2} & \frac{\partial F_3}{\partial u_3}\end{bmatrix}$$

όπου

$$F(w,u) = \begin{bmatrix}F_1(w,u)\\ F_2(w,u)\\ F_3(w,u)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 w_2 w_3 + b_1 u_1\\ a_2 w_1 w_3 + b_2 u_2\\ a_3 w_1 w_2 + b_3 u_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \alpha_1 w_3 & \alpha_1 w_2\\ a_2 w_3 & 0 & \alpha_2 w_1\\ a_3 w_2 & \alpha_3 w_1 & 0\end{bmatrix}\Bigg|_{(w_0,u_0)} \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}$$

Για $w_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, u_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ έχουμε ότι $A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{bmatrix}$

Για $w_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ u_0 = \mathit{οτιδήποτε}$ (αφού B ανεξάρτητος του u), έχουμε ότι

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}0 & \alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}, B = \text{(ίδιος με την προηγούμενη περίπτωση παραπάνω)}$$

Ας επιλέξουμε $w_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, u_0 = \mathit{οτιδήποτε}$

Άρα το σύστημα έχει την μορφή

$$\dot{w} = Aw + Bu + d \longrightarrow \begin{bmatrix}\mathrm{d}_1\\ \mathrm{d}_2\\ \mathrm{d}_3\end{bmatrix}$$

$$d = F(w,u) - Au - Bu = \begin{bmatrix}a_1 w_2 w_3\\ \alpha_2 w_1 w_3\\ \alpha_3 w_1 w_2\end{bmatrix}$$

$$|d_1| = |\alpha_1 w_2 w_3| \le |\alpha_1||w_2||w_3| \le |\alpha_1| 90 * 90$$

$$|d_2| = |\alpha_2| 90^2$$

$$|d_3| = |\alpha_3| 90^2$$

Θέλω να ξέρω τα όρια. Έστω ότι κάθε γωνία δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 90^o

Η παραπάνω ανάλυση, υποθέτει ότι οι παράμετροι α_i, b_i είναι γνωστές και σταθερές. Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν

$$b_1 = \overline{b_1} + \delta b_1$$

$$b_2 = \overline{b_2} + \delta b_2$$

$$b_3 = \overline{b_3} + \delta b_3$$

όπου $\overline{b_\iota}$ είναι η «ονομαστική» (γνωστή) τιμη της παραμέτρου $\overline{b_\iota}$ και δb_i είναι η άγνωστη μεταβολή της παραμέτρου, τότε

$$\dot{w} = Aw + (B + \Delta B)u + d$$

$$B=\begin{bmatrix}\overline{b_1} & 0 & 0\\ 0 & \overline{b_2} & 0\\ 0 & 0 & \overline{b_3}\end{bmatrix},\ \ \Delta B=\begin{bmatrix}\delta b_1 & 0 & 0\\ 0 & \delta b_2 & 0\\ 0 & 0 & \delta b_3\end{bmatrix}$$

Έστω

$|\delta b_1|<\varepsilon$

$|\delta b_2|<\varepsilon$

$|\delta b_3|<\varepsilon$

Τότε

$|\Delta B|=max\,\{|\delta b_1|,|\delta b_2|,|\delta b_3|\}$

$|\Delta B|\le\varepsilon$

Τελικά καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα

$$\overset{\dot{w}}{\begin{bmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\\ \dot{w}_3\end{bmatrix}}=\overset{A}{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}\overset{w}{\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}}+\left(\overset{B}{\begin{bmatrix}\overline{b_1} & 0 & 0\\ 0 & \overline{b_2} & 0\\ 0 & 0 & \overline{b_3}\end{bmatrix}}+\overset{\Delta B}{\begin{bmatrix}\delta b_1 & 0 & 0\\ 0 & \delta b_2 & 0\\ 0 & 0 & \delta b_3\end{bmatrix}}\right)\overset{u}{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}}+\overset{d}{\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{bmatrix}}$$

Έστω ότι

$|\alpha_1|\le\theta$

$|\alpha_2|\le\theta$

$|\alpha_3|\le\theta$

Συνεπώς

$$|d|=\sqrt{|d_1|^2+|d_2|^2+|d_3|^2}\le\sqrt{\theta^2 90^4+\theta^2 90^4+\theta^2 90^4}$$

<u>**Άσκηση**</u>

Αντί για $w_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ να λύσουμε για $w_0=\begin{bmatrix}2\\7\\8\end{bmatrix}$

Για την εξίσωση εξόδου ισχύει ότι

$y=w_1^2+w_2^2+w_3^2=g(w)$

$y=(C+\Delta C)w+(D+\Delta D)u+\xi$

Γραμμικοποίηση

$$y=g(w_0)+\left.\left[\frac{\partial y}{\partial w_1}\ \ \frac{\partial y}{\partial w_2}\ \ \frac{\partial y}{\partial w_3}\right]\right|_{w_0}(w-w_0)+\xi$$

Αν επιλέξουμε $w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y = [2w_1 \quad 2w_2 \quad 2w_3]|_{w_0} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \xi = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \xi$$

$$\xi = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$$

Αυτή η επιλογή δεν είναι «καλή», γιατί $C = [0\ 0\ 0]$

Για $w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y = 3 + [2 \quad 2 \quad 2] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} - 6 + \xi$$

όπου

$$\xi = (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 2w_1 - 2w_2 - 2w_3 + 3)$$

Σχεδιασμός Ελέγκτη: Βήματα

1. **Δεδομένα:**

Α. Το σύστημα

$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + d$

$y = (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)u + \xi$

όπου

$|\Delta A|, |\Delta B|, |\Delta C|, |\Delta D|, |d|, |\xi| \to$ όρια γνωστά

$A, B, C, D \to$ γνωστά

Β. Επιθυμητή κατάσταση x^*

2. **Ζητούμενο**

Ελεγκτής *u(t)=C(y(t))*, έτσι ώστε κατάσταση $x(t) \to x^*$

Βηματική προσέγγιση

- **Βήμα 1**. Σχεδιάζουμε τον ελεγκτή για $y = x, x^* = 0, |\Delta A| = |\Delta B| = \cdots = 0$.
- **Βήμα 2**. Αφαιρούμε την υπόθεση ότι $x^* = 0$ και αναπροσασμόζουμε τον ελεκτή του βήματος 1.
- **Βήμα 3**. Αφαιρούμε την υπόθεση ότι $y = x$ και αναπροσασμόζουμε τον ελεκτή του βήματος 2.
- **Βήμα 4**. Αφαιρούμε την υπόθεση ότι $|\Delta A| = |\Delta B| = \cdots = 0$ και αναπροσασμόζουμε τον ελεκτή του βήματος 3.