Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

«Ονομαστικό» σύστημα

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

όπου *A, B, C, D* είναι γνωστοί, σταθεροί πίνακες (κατάλληλων διαστάσεων).

«Πραγματικό» σύστημα

$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + w$

$y = (C + \Delta C)x + (D + \Delta D)u + \xi$

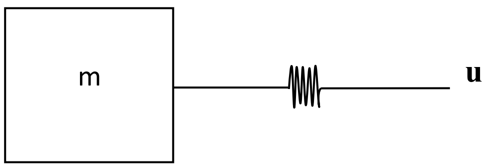
όπου *A, B, C, D* είναι γνωστοί, σταθεροί πίνακες («ονομαστικών παραμέτρων»), *ΔA, ΔB, ΔC, ΔD* είναι αγνωστοί πίνακες που αντιστοιχούν σε αβεβαιότητες/μεταβολές παραμέτρων και

w = μη γραμμικότητες + διαταραχές

ξ = μη γραμμικότητες + θόρυβος(noise)

Παράδειγμα

Vander Pol oscillator



1. Διαφορική εξίσωση:

$m\ddot{z} + c(z^2 - 1)\dot{z} + kz = u$

2. Καταστατική εξίσωση:

$\dot{x} = f(x, u)$ (γενική μορφή)

- Ορίζουμε:

$$x_1 = z$$

$$x_2 = \dot{z} = \dot{x_1}$$

- Έχουμε ότι

$$m\dot{x_2} + c(x_1^2 - 1)x_2 + kx_1 = u$$

$$\dot{x_2} = \frac{1}{m}[u - kx_1 + c(1 - x_1^2)x_2]$$

$$\dot{x_2} = \frac{1}{m}c(1 - x_1^2)x_2 - \frac{1}{m}kx_1 + \frac{1}{m}u$$

- Συνεπώς

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m}c(1-x_1^2)x_2 - \frac{1}{m}kx_1 + \frac{1}{m}u \end{bmatrix} = f(x,u)$$

3. Γραμμικοποίηση

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} * x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} * u$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\frac{c}{m}x_1x_2 - \frac{k}{m} & \frac{1}{m}c(1-x_1^2) \end{bmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!

$\dot{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{dx}_1}{\mathrm{dt}} \rightarrow$ παράγωγος του x_1 ως προς το χρόνο

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Άρα το γραμμικό σύστημα έχει την μορφή

$$\dot{x} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\frac{c}{m}x_1x_2 - \frac{k}{m} & \frac{1}{m}c(1-x_1^2) \end{bmatrix}\right|_{(x_0,u_0)} * x + \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}\right|_{(x_0,u_0)} u$$

Διαφορετικά γραμμικά συστήματα για διαφορετικές επιλογές x_0, u

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = 0 \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{1}{m}c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} * x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} * u$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u = 0 \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2c}{m} - \frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} * x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} * u$$

Το <u>πραγματικό</u> σύστημα έχει την μορφή

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{1}{m}c \end{bmatrix} * x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} * u + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

όπου

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = f(x,u) - Ax - Bu$$

$$\begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{\mathrm{m}} c(1-x_1^2) - \frac{k}{m}x_1 + \frac{u}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 + \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = \frac{1}{m}c(1-x_1^2)x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 = -\frac{c}{m}x_1^2x_2 \end{cases}$$

Συνεπώς, τελικά το σύστημα, παίρνει την μορφή

A **B** **w**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} & \frac{1}{\mathrm{m}}\mathrm{c} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mathrm{m}} \end{bmatrix} * \mathrm{u} + \begin{bmatrix} \mathrm{w}_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$ Εξωγενής παράγοντας

Έστω ότι

$|x_1| \leq a$

$|x_2| \leq \beta$

Τότε

$|g_1(x)| = |w_1| \leq 0$

$|g_2(x)| = |w_2| \leq \frac{c}{m}a^2\beta$

Η παραπάνω ανάλυση, υποθέτει ότι οι παράμετροι $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}$ είναι γνωστές και σταθερές. Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή:

$c = c_0 + \delta c$

$k = k_0 + \delta k$

όπου c_0, k_0 είναι οι «ονομαστικές» (σταθερές και γνωστές) τιμές των παραμέτρων και δc, δk είναι οι – άγνωστες– μεταβολές των παραμέτρων αυτών. Έστω ότι

$|\mathrm{\delta c}| \leq \gamma$

$|\delta\kappa| \leq \delta$

Τότε

$\dot{x} = (A + \mathit{\Delta} A)x + Bu + w$

A **ΔA** **B** **w**

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m} & \frac{c_o}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\delta_\kappa}{m} & \frac{\delta_c}{m} \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} * u + \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$|w_1| = 0$

$|w_2| \leq \frac{c}{m} a^2 \beta$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\delta c}{m} & \frac{\delta \kappa}{m} \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$|\Delta A| \leq \max\left\{0, \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\mathrm{m}}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\mathrm{m}}\right)^2}\right\} = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2}$$

2 διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού του $|\Delta A|$

$|\Delta A| = max\left\{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{12})^2}, \sqrt{(a_{21})^2 + (a_{22})^2}\right\}$ (κατά γραμμές)

$|\Delta A| = max\left\{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{21})^2}, \sqrt{(a_{12})^2 + (a_{22})^2}\right\}$ (κατά στήλες)

$$|\Delta A| \leq \begin{cases} max\,\{0, \sqrt{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2}\} \\ max\left\{\sqrt{0^2 + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2}, \sqrt{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + 0^2}\right\} = max\,\{\frac{\delta}{m}, \frac{\gamma}{m}\} \end{cases}$$

Οπότε, $|\Delta A| \leq \sqrt{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2}$ (επιλέγου την «χειρότερη» περίπτωση)

Τέλος

$|w_2| \leq \frac{c}{m} a^2 \beta (c = c_o + \delta_c)$

$|w_2| \leq \frac{(c_o + \delta_c)}{m} a^2 \beta$

$|w_2| \leq \frac{(c_o + \delta_c)}{m} a^2 \beta + \frac{|\delta_c|}{m} a^2 \beta \ (|\delta_c| \leq \gamma)$

$|w_2| \leq \frac{c_0}{m} a^2 \beta + \frac{\gamma}{m} a^2 \beta$