Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Πρόβλημα βήματος 2 (setpoint regulation)

Παράδειγμα

Έστω ότι το διάνυσμα κατάστασης ενός DC Motor είναι το παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Όπου x_1 είναι οι στροφές/δευτερόλεπτο του κινητήρα, και x_2 είναι η γωνιακή επιτάγχυνση. Έστω ότι επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ελεγκτή, ο οποίος οδηγεί τον κινητήρα σε επιθυμητό αριθμό x_1^* στροφών/δευτερόλεπτο (π.χ., $x_1^* = 2000$).

B2.1. Αρχικά, βρίσκουμε πίνακα C έτσι ώστε

$$y = Cx = x_1$$

δηλαδή η μεταβλητή y αντιστοιχεί στην «υπό έλεγχο κατάσταση» x_1.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο πίνακας C είναι ίσος με

$$C = [1 \quad 0]$$

αφού

$$[1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 + 0x_2 = x_1$$

B2.2 Κατόπι, βρισκούμε ένα διάνυσμα x^*έτσι ώστε

$$Cx^* = x_1^*$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το διάνυσμα x^* είναι το παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής $\begin{bmatrix} 1000 \\ \alpha \end{bmatrix}$, όπου α μια αυθαίρετη τιμή, ικανοποιεί το B2.2. Προτιμάμε πάντα αυτή η τιμή να είναι 0.

B2.3 Ορίζουμε το νέο διάνυσμα κατάστασης

$$\tilde{x} = x - x^*$$

και «σπάμε» τον έλεγχο ως εξής

$$u = u_1 + u_2$$

Έχουμε ότι

$$= \dot{x} - \dot{x}^* = Ax + Bu = Ax - Ax^* + Ax^* + Bu_1 + Bu_2$$
$$= A\left(x - x\dot{\tilde{x}}^*\right) + Ax^* + Bu_1 + Bu_2$$
$$= A\tilde{x} + Bu_1 + Ax^* + Bu_2$$

B2.3 Επιλέγουμε το u_2 έτσι ώστε

$$Ax^* + Bu_2 = 0$$

B2.4 Η εξίσωση για το $\dot{\tilde{x}}$ παίρνει την μορφή:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu_1$$

Στο παραπάνω σύστημα, επιθυμούμε να βρούμε έναν ελεκτή για το u_1 ο οποίος θα

οδηγεί το $\tilde{x}$ στο μηδέν. Αυτό όμως είναι το ίδιο πρόβλημα με το πρόβλημα να βρούμε έναν ελεκτή για το u ο οποίος θα οδηγεί το x στο μηδέν για το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$!

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα

$\dot{x} = Ax + Bu$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
για το οποίο επιθυμούμε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή που θα οδηγεί το x_1 στο 10.

Εφαρμόζοντας το βήμα B2.1 βρίσκουμε ότι

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$
και, εφαρμόζοντας το βήμα B2.2, $\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

Σύμφωνα με το βήμα B2.3, ορίζουμε

$\tilde{x} = x - x^*$

και
$u = u_1 + u_2$

Έχουμε ότι

$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu_1$

και

$Ax^* + Bu_2 = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 = 0 \Longrightarrow$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow u_2 = -30$

Σύμφωνα με το βήμα B2.4, ‘εχουμε

$\tilde{x} = x - x^* = \begin{bmatrix} x_1 - 10 \\ x_2 - 0 \end{bmatrix}$
$u = u_1 + u_2$

$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$
$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 10 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} + Bu_1 + Bu_2$
$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \end{bmatrix} + Bu_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-30) \quad (αφού\ u_2 = -30)$

Και τελικά καταλήγουμε στο σύστημα
$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$

Συνεπώς

$u_1 = K\tilde{x}$
$K = -BR^{-1}P$
$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q$
$u = u_1 + u_2 = K\tilde{x} - 10$

Άσκηση

Να σχεδιάσετε ελεγκτή που οδηγεί το x_2 στο 10 και να αναλύσετε την ευρωστία του, για το παρακάτω σύστημα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} u + w$$

όπου $|\delta| \leq 0.1, |w| \leq 1.$

Λύση

Θα εφαρσμόσουμε την μέθοδο του integrator backestepping, ώστε οι αβεβαιότητες να «μεταφερθούν» από τον πίνακα B στον πίνακα A.

Έχουμε ότι

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}\right) x + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix}}_{\Delta B}\right) u + w$$

Ξαναγράφουμε το παραπάνω ως εξής:

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}\right) x + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta - 1 \end{bmatrix}\right) u + w$$

Ορίζουμε $\bar{\delta} = \delta - 1.$ Έχουμε ότι
$|\bar{\delta}| \leq |\delta| + |1| = 0.1 + 1 = 1.1$
$|\bar{\delta}| \leq 1.1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\delta} \end{bmatrix}\right) u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Θα «μεταθέσουμε» την αβεβαιότητα του B στον A. Ορίζουμε

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u \end{bmatrix} \qquad \dot{u} = v \qquad |w| \leq 1, |\bar{\delta}| \leq 1.1$$

Έχουμε ότι
$\dot{z} = (A + \Delta A)z + Bv + \bar{w}$ (οι A,B είναι διαφορετικοί από παραπάνω):

$$\begin{bmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \\ \dot{z_3} \\ \dot{z_4} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A ΔA B $\overline{w}$

Πρόβλημα Βήματος 3

Σχεδιασμός ελεγκτή για την περίπτωση που το διάνυσμα κατάστασης x δεν είναι διαθέσιμο για μέτρηση.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

Εκτιμητής

$\hat{x}$ = εκτίμηση του x

$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})$

Ορίζουμε $e = x - \hat{x}$

Έχουμε ότι

$\dot{e} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(Cx - C\hat{x}) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) = Ae - LCe$
Συνεπώς

$\dot{e} = (A - LC)e$

Θα πρέπει ο πίνακας L να σχεδιασθεί έτσι ώστε το παραπάνω σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Κάνοντας χρήση παρόμοιας θεωρίας με αυτή του ΓΤΕ, μπορούμε να δούμε ότι αν ο πίνακας L, σχεδιασθεί ως εξής:
$L = XC^T\Phi^{-1}$
$XA + A^TX - XC^T\Phi^{-1}X = -\Psi$
όπου Ψ, Φ είναι θετικά ορισμένοι πίνακες (ορίζονται από τον χρήστη), τότε
$W = e^TXe$
$\dot{W} \leq -e^T\Psi e$

Και συνεπώς το σύστημα $\dot{e} = (A - LC)e$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ο ελεγκτής σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνει την μορφή

$u = K\hat{x}$
$K = -R^{-1}B^TP$
$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP = -Q$

Άσκηση

Να σχεδιάσετε έναν ελεγκτή για το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι ο ελεγκτής

$u = K\hat{x}$

$$K = -R^{-1}B^T P$$
$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

οδηγεί σε ασυμπτωτικά ευσταθείς λύσεις, κάνοντας χρήση των παρακάτω 2 σχέσεων

$$W = e^T X e$$
$$\dot{W} \leq -e^T \Psi e$$