Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Παράδειγμα (Συνέχεια)

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

Για $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1$, η λύση της ARE είναι η παρακάτω:

$P = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.73 \\ 0.73 & 1.03 \end{bmatrix}$

$|P| = max\,\{\sqrt{1.58^2 + 0.73^2}, \sqrt{0.73^2 + 1.03^2}$
$= max\{1.74, 1.26\} = 1.74$

$\dot{V} \leq -|x|^2 + \frac{1}{8}|x|^2 + 24.22 w_0^2$

$\dot{V} \leq -\frac{7}{8}|x|^2 + 24.22 w_0^2$

Συνεπώς το $|x|$ θα συγκλίνει στο σύνολο $\left\{x \middle| |x|^2 < \frac{8}{7} 24.22 w_0^2\right\} = \{x||x|^2 < 21.19 w_0^2\}$

Για $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1$, η λύση της ARE είναι η παρακάτω:

$P = \begin{bmatrix} 15.8 & 7.3 \\ 7.3 & 10.3 \end{bmatrix}$

$|P| = 17.4$

$\dot{V} \leq 10|x|^2 - \frac{7}{8}|x|^2 + 2422 w_0^2$

Συνεπώς το $|x|$ θα συγκλίνει στο σύνολο $\{x||x|^2 < 265 w_0^2\}$

Για $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$, η λύση της ARE είναι η παρακάτω:

$P = \begin{bmatrix} 5.12 & 6.16 \\ 6.16 & 9.41 \end{bmatrix}$

$|P| = 11.25$

$\dot{V} \leq -\frac{7}{8}|x|^2 + 1012.5 w_0^2$

Συνεπώς το $|x|$ θα συγκλίνει στο σύνολο $\{x||x|^2 < 1156 w_0^2\}$

Εναλλακτικά:

$$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2 w_0 |P||x|$$

$2w_0|P||x| = \underbrace{2 a w_0 |P|}_{x} \underbrace{\frac{|x|}{a}}_{y}$, εφαρμογή τριγωνικής ανισότητας $xy \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2$

$$2aw_0|P|\frac{|x|}{a} \leq \frac{1}{2}(|2aw_0|P||)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{a}\right)^2$$

$$2w_0|P||x| \leq 2|aw_0|P||^2 + \frac{1}{2a^2}(|x|^2)$$

$$\dot{V} \leq -x_1^2 - x_2^2 + 2|aw_0|P||^2 + \frac{1}{2a^2}(|x|^2)$$

$$\dot{V} \leq -|x|^2 + 2|aw_0|P||^2 + \frac{1}{2a^2}(|x|^2), \quad |P| = 1.74$$

$$\dot{V} \leq -\left(1 - \frac{1}{2a^2}\right)(|x|^2) + 2a^2 1.74^2$$

Συνεπώς

$$|x|^2 > \frac{2a^2 1.74^2}{1 - \frac{1}{(2a^2)}} \quad => \quad \dot{V} < 0$$

Ανάλυση ευρωστίας συστήματος κλειστού βρόχου (στην περίπτωση εξωγενων διαταραχών και αβεβαιότητας στον πίνακα *A*)

$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu + w$
$A, B\ \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{\alpha}$
$|\Delta A| \leq \delta\alpha$
$w \leq w_0$

Έχουμε ότι
$V = x^T P x$
$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \big((A + \Delta A)x + Bu + w\big)^T P x + x^T P\big((A + \Delta A)x + Bu + w\big)$
$= (Ax + Bu)^T P x + x^T P(Ax + Bu) + (\Delta A + w)^T P x + x^T P(\Delta A + w)$
$= -x^T Q x - x^T P B R^{-1} B^T P x + (\Delta A x)^T P x + w^T P x + x^T P \Delta A x + x^T P w$

Συνεπώς, κάνοντας χρήση των παρακάτω:

$w^T P x \leq |w^T P x| \leq |w^T||P||x|$

$|x^T| = |x|$
$|x|^2 = x^T x = x^T I x$ (όπου I ο μοναδιαίος πίνακας)

έχουμε ότι
$\dot{V} \leq -x^T Q x + |(\Delta A x)^T P x| + |w^T P x| + |x^T P \Delta A x| + |x^T P w|$
$\dot{V} \leq -x^T Q x + |x^T||\Delta A^T||P||x| + |w^T||P||x| + |x^T||P||\Delta A||x| + |x^T||P||w|$
$\dot{V} \leq -x^T Q x + |x||\Delta A||P||x| + |w||P||x| + |x||P||\Delta A||x| + |x||P||w|$
$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2|x||\Delta A||P||x| + 2|w||P||x|$
$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2|x|^2 \delta\alpha |P| + 2w_0|P||x|$

$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2\delta\alpha|P| x^T I x + 2w_0|P||x|$

Έστω

$$L = 2\delta\alpha|P|I = \begin{bmatrix} 2\delta\alpha|P| & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 2\delta\alpha|P| & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 2\delta\alpha|P| \end{bmatrix}$$

Οπότε, τελικά καταλήγουμε

$\dot{V} \leq\ -x^T Q x + x^T L x + 2w_0|P||x|$
$\dot{V} \leq\ -x^T (Q - L) x + 2w_0|P||x|$

Άσκηση

Για το παρακάτω σύστημα

$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\right) x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, $|\delta| \leq 0.1$, $|w| \leq 1$

Σχεδιάζουμε ένα ελεγκτή ΓΤΕ, επιλέγοντας

$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, R = r$

Οι επιλογές για τις παραμέτρους *q*, *r* και η αντίστοιχη λύση *P* της Algebraic Riccati Equation (ARE), είναι οι παρακάτω:

r =1, q = 1

$$P = \begin{bmatrix} 5.1244 & 6.1623 \\ 6.1623 & 9.4152 \end{bmatrix}$$

r =10, q =1

$$P = \begin{bmatrix} 40.0039 & 60.1662 \\ 60.1662 & 93.0408 \end{bmatrix}$$

r =1, q =10

$$P = \begin{bmatrix} 15.8144 & 7.3589 \\ 7.3589 & 10.3810 \end{bmatrix}$$

r =0.1000, q =1

$$P = \begin{bmatrix} 1.5814 & 0.7359 \\ 0.7359 & 1.0381 \end{bmatrix}$$

r =0.0100, q =1

$$P = \begin{bmatrix} 1.1280 & 0.1344 \\ 0.1344 & 0.1595 \end{bmatrix}$$

r =0.1000, q =0.1000

$$P = \begin{bmatrix} 0.5124 & 0.6162 \\ 0.6162 & 0.9415 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω επιλογές οδηγούν σε εύρωστους ελεκτές (δηλαδή ελεγκτές που οδηγούν το μέτρο της κατάστασης να συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο σύνολο), και από τους εύρωστους ελεγκτές, να βρείτε ποιος είναι ο «καλύτερος».

Επίλυση

Η ανίσωση που πρέπει να πληρείται είναι:

$\dot{V} \leq -x^T(Q-L)x + 2w_0|P||x|$

όπου $L = 2\delta_\alpha |P| I$

Στα συστήματα που θα εξεταστούν ισχύει:

$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \delta \leq 0.1 \Longrightarrow$

$|\Delta A| = max\{\sqrt{0^2+0^2}, \sqrt{0^2+0.1^2} = max\{0{,}0.1\} = 0.1$

συνεπώς $|\Delta A| \leq \delta_\alpha => \delta_\alpha = 0.1 \Longrightarrow \ L = 0.2|P|I$

Περίπτωση 1:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 => P = \begin{bmatrix} 5.1244 & 6.1623 \\ 6.1623 & 9.4152 \end{bmatrix}$$

$|P| = ma\,x\left\{\sqrt{5.1244^2+6.1623^2}, \sqrt{6.1623^2+9.4152^2}\right\} = max\{8.01{,}11.25\} = 11.25$

$\dot{V} \leq -x^T(Q-L)x + 2w_0|P||x|$, όπου $w_0 = 1$ αφού $|w| \leq 1$

$\dot{V} \leq -\mathrm{x}^\mathrm{T}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.2 * 11.25 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\mathrm{x} + 2 * 1 * 11.25 * |\mathrm{x}|$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} -1.25 & 0 \\ 0 & -1.25 \end{bmatrix}\right)x + 22.5 * |x|$

$\dot{V} \leq 1.25x_1^2 + 1.25x_2^2 + 22.5|x|$

Οπότε, **δεν** μπορούμε να αποδείξουμε ευρωστία του συστήματος, αφού ο όρος $1.25x_1^2 + 1.25x_2^2$ είναι θετικός (για x διαφορετικό του 0).

Περίπτωση 2:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 10 => P = \begin{bmatrix} 40.0039 & 60.1662 \\ 60.1662 & 93.0408 \end{bmatrix}$$

$$|P| = max\left\{\sqrt{40.0039^2 + 60.1662^2}, \sqrt{60.1662^2 + 93.0408^2}\right\} = max\{72.25,110.8\} = 110.8$$

$\dot{V} \leq -x^T(Q - L)x + 2w_0|P||x|$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.2 * 110.8 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)x + 2 * 1 * 110.8 * |x|$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} -21.16 & 0 \\ 0 & -21.16 \end{bmatrix}\right)x + 2 * 1 * 110.8 * |x|$

$\dot{V} \leq 21.16x_1^2 + 21.16x_2^2 + 221.6|x|$

Όπως στην Περίπτωση 1, **δεν** μπορούμε να αποδείξουμε ευρωστία του συστήματος

Περίπτωση 3:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1 => P = \begin{bmatrix} 15.8144 & 7.3589 \\ 7.3589 & 10.3810 \end{bmatrix}$$

$|P| = max\left\{\sqrt{15.8144^2 + 7.3589^2}, \sqrt{7.3589^2 + 10.3810^2}\right\} = max\{17.44,12.72\} = 17.44$

$\dot{V} \leq -x^T(Q - L)x + 2w_0|P||x|$, όπου $w_0 = 1$ αφού $|w| \leq 1$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} - 0.2 * 17.44 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)x + 2 * 1 * 17.44 * |x|$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} 6.512 & 0 \\ 0 & 6.512 \end{bmatrix}\right)x + 34.88|x|$

$\dot{V} \leq -6.512x_1^2 - 6.512x_2^2 + 34.88|x|$

Το σύστημα **οδηγεί** σε εύρωστο ελεγκτή, αφού ο όρος $-6.512x_1^2 - 6.512x_2^2$ είναι αρνητικός (για x διαφορετικό του 0).

Περίπτωση 4:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1 => P = \begin{bmatrix} 1.5814 & 0.7359 \\ 0.7359 & 1.0981 \end{bmatrix}$$

$$|P| = max\left\{\sqrt{1.5814^2 + 0.7359^2}, \sqrt{0.7359^2 + 1.0981^2}\right\} = max\{1.745,1.274\} = 1.745$$

$\dot{V} \leq -x^T(Q - L)x + 2w_0|P||x|$, όπου $w_0 = 1$ αφού $|w| \leq 1$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.2 * 1.745 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)x + 2 * 1 * 1.745 * |x|$

$\dot{V} \leq -x^T\left(\begin{bmatrix} 0.651 & 0 \\ 0 & 0.651 \end{bmatrix}\right)x + 3.49 * |x|$

$\dot{V} \leq -0.651x_1^2 - 0.651x_2^2 + 3.49|x|$

Το σύστημα **οδηγεί** σε εύρωστο ελεγκτή.

Περίπτωση 5:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.01 => P = \begin{bmatrix} 1.128 & 0.1344 \\ 0.1344 & 0.1595 \end{bmatrix}$$

$|P| = max\left\{\sqrt{1.128^2 + 0.1344^2}, \sqrt{0.1344^2 + 0.1595^2}\right\} = max\{1.135, 0.208\} = 1.135$
$\dot{V} \le -0.773x_1^2 - 0.773x_2^2 + 2.27|x|$
Το σύστημα **οδηγε**ί σε εύρωστο ελεγκτή

Περίπτωση 6:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, R = 0.1 => P = \begin{bmatrix} 0.5124 & 0.6162 \\ 0.6162 & 0.9415 \end{bmatrix}$$

$|P| = max\left\{\sqrt{0.5124^2 + 0.6162^2}, \sqrt{0.6162^2 + 0.9415^2}\right\} = max\{0.8, 1.125\} = 1.125$
$\dot{V} \le 0.125x_1^2 + 0.125x_2^2 + 2.25|x|$

Οπότε, **<u>δεν</u>** μπορούμε να αποδείξουμε ευρωστία του συστήματος

Συνοψίζοντας, οι περιπτώσεις που οδηγούν σε εύρωστο ελεγκτή είναι οι:

Περίπτωση 3: $\dot{V} \le -6.512x_1^2 - 6.512x_2^2 + 34.88|x|$

Περίπτωση 4: $\dot{V} \le -0.651x_1^2 - 0.651x_2^2 + 3.49|x|$

Περίπτωση 5: $\dot{V} \le -0.773x_1^2 - 0.773x_2^2 + 2.27|x|$

Κάνοντας χρήση της

$2w_0|P||x| \le 2|aw_0|P||^2 + \frac{1}{2a^2}(|x|^2)$

έχουμε ότι

Περίπτωση 3:

$\dot{V} \le -6.512x_1^2 - 6.512x_2^2 + 2 * 1 * 17.44|x|$

$\dot{V} \le -6.512|x|^2 + 2a^2 1^2 17.44^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{a}\right)^2$

$\dot{V} \le -6.512|x|^2 + 608.3a^2 + \frac{1}{2a^2}|x|^2$

$\dot{V} \le -\left(6.512 - \frac{1}{2a^2}\right)|x|^2 + 608.3a^2$

Όποτε έχουμε ότι $\dot{V} \le 0$ για

$|x|^2 \ge \frac{608.3a^2}{\left(6.512 - \frac{1}{2a^2}\right)} = A_1$

Περίπτωση 4: Παρομοίως

Όποτε έχουμε ότι $\dot{V} \le 0$ για

$$|x|^2 \geq \frac{6.09a^2}{\left(0.651 - \frac{1}{2a^2}\right)} = A_2$$

και

Περίπτωση 5:

Όποτε έχουμε ότι $\dot{V} \leq 0$ για

$$|x|^2 \geq \frac{2.576a^2}{\left(0.773 - \frac{1}{2a^2}\right)} = A_3$$

Το ποιος από τους 3 ελεγκτές είναι ο καλύτερος εξαρτάται από το α που θα επιλεχθεί κάθε φορά. **Για κάθε ελεγκτή το πιο ιδανικό α είναι διαφορετικό.**

Χρησιμοποιώντας το Matlab μπορούμε να βρούμε τα κατάλληλα α σε σημεία όπου οι $A_1, A_2, A_3 = min$ μέσω των :

Κώδικας:

function=@(x)
val=fminbnd(function,1,0001, 1000)

min=function(val)

$A_1: min = 101{,}1995\ για\ val = a = 1{,}0001$
$A_2: min = 28{,}7399\ για\ val = a = 1{,}2394$
$A_3: min = 8.6222\ για\ val = a = 1{,}1374$

Επομένως, αν έχουμε την ευχέρεια να επιλέξουμε το κατάλληλο α μέσω του κώδικα, ο «καλύτερος ελεγκτής» που μπορούμε να επιλέξουμε είναι αυτός της **περίπτωσης 5**.

<u>Ανάλυση ευρωστίας συστήματος κλειστού βρόχου (στην περίπτωση εξωγενων διαταραχών και αβεβαιότητας στον πίνακα *A* και στον πίνακα *B*)</u>

$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + w$

Μέθοδος Integrator backstepping

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}}_{\Delta A} \Bigg) x + \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\Delta B} \Bigg) u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$|\delta| \leq 0.5$
$|\gamma| \leq 0.8$

Εισάγουμε τις παρακάτω μεταβλητές

$\dot{u} = v \quad z_1 = x_1 \quad z_2 = x_2 \quad z_3 = u$

Έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4+\delta & 1+\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \bar{w}$$

<u>Στο παραπάνω σύστημα οι αβεβαιότητες του πίνακα *B*, «μεταφέρονται» σαν αβεβαιότητες στον πίνακα *A*.</u>