Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Παράδειγμα

Να εξετασθεί η ΑΕ του παρακάτω συστήματος

$$\dot{x_1} = (x_2 - x_1)x_1^3$$
$$\dot{x_2} = -\frac{x_1^4}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2}$$

κάνοντας χρήση της παρακάτω συνάρτησης Lyapunov

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

Έχουμε ότι

$$V(x) > 0 \ \forall x \neq 0, V(x) = 0 <=> x = 0$$

και συνεπώς η 1η προϋπόθεση πληρείται

Όσον αφορά στην 2η προϋπόθεση, έχουμε ότι

$$\dot{V} = \frac{2x_1\dot{x_1}(1+x_1^2) - x_1^2 2x_1\dot{x_1}}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2\dot{x_2}$$
$$= \frac{2x_1\dot{x_1} + 2x_1^3\dot{x_1} - 2x_1^3\dot{x_1}}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2\dot{x_2}$$
$$= \frac{2x_1\dot{x_1}}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2\dot{x_2}$$
$$= \frac{2x_1(x_2-1)x_1^3}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2\left(-\frac{x_1^4}{(1+x_1^2)^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2}\right)$$
$$= \frac{2x_1^4x_2 - 2x_1^4}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2x_1^4x_2}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2x_2^2}{(1+x_1^2)^2}$$
$$= -\frac{2x_1^4}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2x_2^2}{(1+x_1^2)^2}$$

Έχουμε ότι

$$\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \neq 0, \dot{V}(x) = 0 <=> x = 0$$

και συνεπώς η 2η προϋπόθεση πληρείται

Οπότε το σύστημα είναι ΑΕ.

Παράδειγμα

$$\dot{x} = A_{cl}x$$
$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x^TQx = [x_1 \ \ x_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ \ x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2$, οπότε ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$
$$PA_{cl} + A_{cl}^TP = -Q$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & P_1 + P_2 \\ P_3 & P_2 + P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 & P_3 \\ P_1 + P_2 & P_2 + P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2P_2 & P_1 + P_2 + P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & 2P_2 + 2P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} P_2 &= -\frac{1}{2} \\ P_1 + P_2 + P_3 &= 0 \\ P_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} P_2 &= -\frac{1}{2} \\ P_1 &= \frac{1}{2} \\ P_3 &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$x^T P x = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 = x_1\left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)$$

Ο P δεν είναι θετικά ορισμένος, οπότε το σύστημα <u>δεν</u> είναι ΑΕ

Παράδειγμα

Παρομοίως, για την περίπτωση

$\mathrm{A_{cl}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$\mathrm{PA_{cl}} + \mathrm{A_{cl}^T P} = -\mathrm{Q}$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{P_1} & \mathrm{P_2} \\ \mathrm{P_2} & \mathrm{P_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{P_1} & \mathrm{P_2} \\ \mathrm{P_2} & \mathrm{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\mathrm{P_2} & \mathrm{P_1} - \mathrm{P_2} \\ -\mathrm{P_3} & \mathrm{P_2} - \mathrm{P_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{P_2} & -\mathrm{P_3} \\ \mathrm{P_1} - \mathrm{P_2} & \mathrm{P_2} - \mathrm{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2\mathrm{P_2} & \mathrm{P_1} - \mathrm{P_2} - \mathrm{P_3} \\ \mathrm{P_1} - \mathrm{P_2} - \mathrm{P_3} & 2\mathrm{P_2} - 2\mathrm{P_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{P_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P_1} - \mathrm{P_2} - \mathrm{P_3} = 0$$

$$P_2 - P_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \\ P_1 &= \frac{3}{2} \\ P_3 &= 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$x^T P x = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) =$$

$$= x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 > 0 \forall x \neq 0$$

Ο P είναι θετικά ορισμένος, οπότε το σύστημα είναι ΑΕ

Πρόβλημα Βήματος 1, Επίλυση με χρήση θεωρίας Γραμμικού Τετραγωνικού Ελέγχου
(Linear Quadratic Control (LQC) or Linear Quadratic Regulation (LQR))

Κριτήριο «Κόστους»

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Rus(s)\right)ds$$

$Q > 0, R > 0 \rightarrow$ **θετικά ορισμένοι και συμμετρικοί** (τους ορίζουμε εμείς)

Στην περίπτωση που όλα τα μεγέθη είναι βαθμωτά:

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}$

$Q = q \in \mathbb{R}, R = r \in \mathbb{R}$

$$J = \int_0^\infty \left(\mathrm{x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Rus(s)}\right)\mathrm{ds} =>$$
$$J = \int_0^\infty (qx^2(s + ru^2(s))ds$$

Θέλουμε να βρούμε **τον ελεγκτή που ελαχιστοποιεί το $\boldsymbol{J}$**.

Ο ελεγκτής αυτός δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:
$u = Kx\ (\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\lambda\varepsilon\gamma\kappa\tau\acute{\eta}\varsigma)$
$K = -R^{-1}B^TP$
$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP = -Q$ Algebraic Ricatti Equation (ARE)

Ο πίνακας P είναι πάντα συμμετρικός ($P = P^T$).

Παράδειγμα

$m\ddot{z} + c(z^2 - 1) + kz = 0$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Έστω
$m = 1$
$k = -3$
$c = 4$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

Έχουμε ότι

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Έστω ότι

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$$

Έχουμε

$$J = \int_0^\infty (x_1^2(s) + x_2^2(s) + u^2(s))\mathrm{ds}$$

Στην περίπτωση που

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1,$ έχουμε $J = \int_0^{\infty} (x_1^2(s) + x_2^2(s) + 0.1u^2(s))\mathrm{ds}$

Στην περίπτωση που

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, R = 100, \text{ έχουμε } J = \int_0^{\infty} (x_1^2(s) + 0.01x_2^2(s) + 100u^2(s))\mathrm{ds}$$

Η επίλυση της ARE, μπορεί να γίνει στην Matlab, κάνοντας χρήση της παρακάτω εντολής

<u>P=are(A,B,R,Q)</u>

Π.χ., για

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1$

η επίλυση της ARE, δίνει

$P = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.73 \\ 0.73 & 1.03 \end{bmatrix},$

συνεπώς

$u = -\frac{1}{0.1} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1.58 & 0.73 \\ 0.73 & 1.03 \end{bmatrix}$

$u = -10[0.73 \quad 1.03] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$u = [-7.3 \quad -10.3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Παρομοίως για

$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, R = 1$

η επίλυση της ARE, δίνει

$P = \begin{bmatrix} 15.8 & 7.3 \\ 7.3 & 10.3 \end{bmatrix}$

Ενώ για

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$ έχουμε $P = \begin{bmatrix} 5.12 & 8.16 \\ 8.16 & 9.41 \end{bmatrix}$

<u>Ανάλυση ευστάθειας συστήματος κλειστού βρόχου</u>

Έχουμε ότι, αν ορίσουμε την συνάρτηση Lyapunov $V = x^T P x$,

0

$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x}$

Επίσης, $\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P x$

Συνεπώς

$\dot{V} = (Ax - BR^{-1}B^T P x)^T P x + x^T P (Ax - BR^{-1}B^T P x)$

Κάνοντας χρήση των παρακάτω ιδιοτήτων

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

προκύπτει ότι

$$(Ax - BR^{-1}B^T Px)^T \Longrightarrow$$
$$(Ax)^T - (BR^{-1}B^T Px)^T \Longrightarrow$$
$$\mathrm{x}^T A^T - (R^{-1}B^T Px)^T B^T \Longrightarrow$$
$$x^T A^T - (B^T Px)(R^{-1})^T B^T \Longrightarrow$$
$$x^T A^T - (Px)^T (B^T)^T (R^{-1})^T B^T \Longrightarrow$$
$$x^T A^T - x^T P^T B(R^{-1})^T B^T \; (R\ \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{o}\varsigma \Longrightarrow (R^{-1})^T = R^{-1}) \Longrightarrow$$
$$x^T A^T - x^T P^T BR^{-1}B^T$$

Άρα, αφού $P = P^T$

$$\dot{V} = (x^T A^T - x^T PBR^{-1}B^T)Px + x^T P(Ax - BR^{-1}B^T Px)$$

$$\dot{V} = x^T A^T Px - x^T PBR^{-1}B^T Px + x^T P\, Ax - x^T PBR^{-1}B^T Px$$

$$\dot{V} = x^T A^T Px - x^T PBR^{-1}B^T Px + x^T P\, Ax - x^T PBR^{-1}B^T Px$$

$$\dot{V} = x^T (A^T P - PBR^{-1}B^T P + PA - PBR^{-1}B^T P)x$$

Κάνοντας χρήση της ARE, τελικά καταλήγουμε ότι

$$\dot{V} = x^T (-Q - PBR^{-1}B^T P)x$$

$$\dot{V} = -x^T Qx - x^T PBR^{-1}B^T Px$$

Ο όρος $x^T PBR^{-1}B^T Px$ είναι πάντα ≤ 0

Συνεπώς, αφού ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος,

$\boldsymbol{\dot{V} \leq 0}$, ***οπότε το σύστημα είναι ΑΕ***

Ανάλυση ευρωστίας συστήματος κλειστού βρόχου

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Κάνοντας χρήση των παρακάτω

$$w^T Px \leq |w^T||P||x|$$
$$|x^T| = |x|$$
$|x|, |P|, |w|$ βαθμωτά μεγέθη

έχουμε ότι,

$$\dot{V} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax + Bu + w)^T Px + x^T P(Ax + Bu + w) =$$
$$= (Ax + Bu)^T Px + x^T P(Ax + Bu) + w^T Px + x^T Pw$$
$$= -x^T Qx - x^T PBR^{-1}B^T Px + w^T Px + x^T Pw$$

$$\leq -x^T Qx + |w^T||P||x| + |x^T||P||w|$$

$$= -x^T Qx + |w||P||x| + |x||P||w|$$
$$= -x^T Qx + 2|w||P||x|$$

Έστω ότι, $|w| \leq w_0$

Τότε, καταλήγουμε ότι

$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2w_0|P||x|$

Παράδειγμα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.73 \\ 0.73 & 1.03 \end{bmatrix}$$

$$V = x^T P x = 1.58x_1^2 + 1.03x_2^2 + 1.46x_1 x_2$$

$$|P| = max\,\{\sqrt{1.58^2 + 0.73^2}, \sqrt{0.73^2 + 1.03^2}$$
$$= max\{1.74, 1.26\} = 1.74$$

Συνεπώς

$$\dot{V} \leq -x_1^2 - x_2^2 + 2w_0 1.74|x|$$

Ξαναγράφοντας τον 3° όρο της παραπάνω ανισότητας

$$2 * 1.74w_0|x| = 4 * 1.74w_0\frac{|x|}{2}$$

Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας

$$\text{xy} \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2$$
$$\text{για } \chi \to 4 * 1.74w_0$$
$$\text{και } y \to \frac{|x|}{2}$$

έχουμε ότι

$$2 * 1.74w_0|x| \leq \frac{1}{2}(4 * 1.74w_0)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^2$$

και συνεπώς

$$\dot{V} \leq -x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}(4 * 1.74w_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{|x|^2}{4}$$
$$\dot{V} \leq -x_1^2 - x_2^2 + \frac{48.44}{2}w_0^2 + \frac{1}{8}|x|^2$$
$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_2^2 + 24.22\mathrm{w}_0 + \frac{1}{8}|\mathrm{x}|^2$$
$$\dot{\mathrm{V}} \leq -|x|^2 + \frac{1}{8}|x|^2 + 24.22w_0^2$$
$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{7}{8}|x|^2 + 24.22w_0^2$$
$$\dot{\mathrm{V}} \leq -\frac{7}{8}|x|^2 + A$$

$\dot{V} < 0$, όσο $\frac{7}{8}|x|^2 > A$

Συνεπώς το $|x|$ θα συγκλίνει στο σύνολο $\left\{x \middle| |x|^2 < \frac{8}{7} 24.22 w_0^2\right\}$