Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Γενική περιγραφή συστήματος:

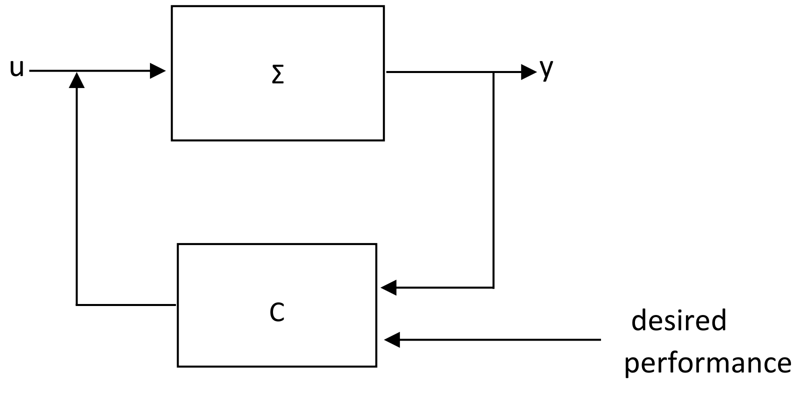
$\dot{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$

Όπου

$\boldsymbol{x}$	Διάνυσμα κατάστασης
$\boldsymbol{u}$	Διάνυσμα εισόδου
$\boldsymbol{y}$	Διάνυσμα εξόδου (μετρήσεων)
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$	Σταθεροί πίνακες

Πρόβλημα σχεδιασμού ελεγκτή



Χρήσιμοι Ορισμοί/Ιδιότητες

x, y διανύσματα, A, B πίνακες

Ορισμός: Μέτρο διανύμαστος

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Παράδειγμα:

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \quad |x| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-7)^2}$$

$$x^T = [5 \;\; 3 \; -7]$$

$$|x| = |x^T|$$

Ιδιότητα: Ισχύει ότι:

$$x^T x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1^2 + x_2^2 + +x_3^2]$$

άρα

$$\sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + +x_3^2} = |x|$$

Ορισμός: Ανάστροφος πίνακα

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix}, \qquad 2x3 \text{ πίνακας}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{bmatrix}, \qquad 3x2 \text{ πίνακας}$$

Ιδιότητα: Ισχύει ότι:

$$(AB)^T = A^T B^T$$

Παράδειγμα:

Έστω

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = A^T B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Μέτρο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

$|A| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}$$

Εναλλακτικά

$\alpha_1 = [\alpha_{11} \;\; \alpha_{12}\,] \quad |\,\alpha_1|$

$\alpha_2 = [\alpha_{21} \;\; \alpha_{22}\,] \quad |\,\alpha_2|$

$\alpha_3 = [\alpha_{31} \;\; \alpha_{32}\,] \quad |\,\alpha_1|$

$|A| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|\}$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$|\,\alpha_1| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 8^2}$

$|\,\alpha_2| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 2^2}$

$|A| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} = |\,\alpha_1|$

$\alpha_1 = [\alpha_{11} \;\; \alpha_{12}\,] \quad |\,\alpha_1| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$\alpha_2 = [\alpha_{21} \;\; \alpha_{22}\,] \quad |\,\alpha_2| = \sqrt{5^2 + 7^2}$

$\alpha_3 = [\alpha_{31} \;\; \alpha_{32}\,] \quad |\,\alpha_1| = \sqrt{8^2 + 2^2}$

$|A| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|\} = |\,\alpha_2|$

Το μέτρο ενός πίνακα δεν ορίζεται μονοσήμαντα.

Ιδιότητα: Τριγωνική ιδιότητα

$x^T y \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2$

Ιδιότητες:

$x^T y \leq |x^T y| \leq |x^T||y| = |x||y|$

$|AB| \leq |A||B|, A \leq |A|$

Ορισμός: τετραγωνικός πίνακας

Αριθμός γραμμών=Αριθμός στηλών

Ορισμός: συμμετρικός πίνακας

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i \neq j$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\alpha_{21} = \alpha_{12}$

$\alpha_{31} = \alpha_{13}$

$\alpha_{32} = \alpha_{23}$

Ιδιότητα:

$A = A^T$

Ορισμός:

Θετικά ορισμένος – positive definite

- Τετραγωνικός
- Συμμετρικός
- $\forall\, x \neq 0 \;\; x^T A x > 0$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$, για να ισχύει πρέπει ένα τουλάχιστον από τα x_1, x_2, x_3 να είναι $\neq 0$

$$x^T A x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} > 0$$

Ορισμός:

Θετικά ημιορισμένος – semi definite

- Τετραγωνικός
- Συμμετρικός
- $\forall\, x \neq 0 \;\; x^T A x \geq 0$

Παραδείγματα:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad x^{\mathrm{T}}Ax = 3\mathrm{x}_1^2 + 4\mathrm{x}_2^2 + 2\mathrm{x}_3^2 > 0 \ (x \neq 0)$$

Οπότε ο Α είναι θετικά ορισμένος.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x^{\mathrm{T}}Ax = 3\mathrm{x}_1^2 + 4\mathrm{x}_2^2$$

Για $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq 0$ έχουμε $x^{\mathrm{T}}Ax = 0$

Οπότε ο Α είναι θετικά ημιορισμένος.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax} = 3\mathrm{x}_1^2 + 4\mathrm{x}_2^2 - 2\mathrm{x}_3^2$$

Σε αυτή την περίπτωση ο Α δεν είναι ούτε θετικά ορισμένος, ούτε θετικά ημιορισμένος.