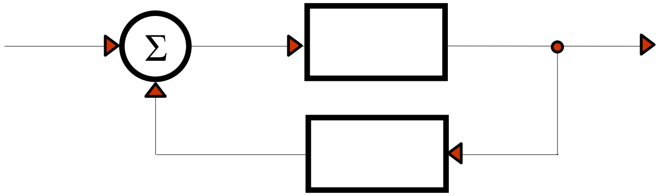


ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Συστήματα αυτομάτου ελέγχου (II)

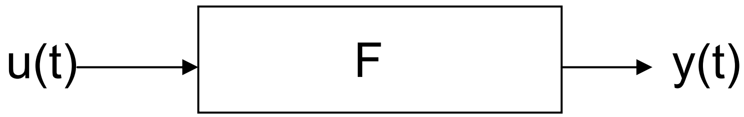
Modern Control Theory

(1η Ενότητα: Συστήματα Συνεχούς Χρόνου)

Διδάσκων : **Ι. Μπούταλης**
Αναπληρωτής Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Δομή και βασικές κατηγορίες συστημάτων

Σύστημα είναι ένα σύνολο στοιχείων τα οποία είναι κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους για να επιτελέσουν κάποιο έργο. Για να φέρει όμως ένα σύστημα σε πέρας ένα έργο θα πρέπει να του δοθεί ,η **κατάλληλη διέγερση**. Η απόκριση y(t) καλείται επίσης και **συμπεριφορά** του συστήματος.



$$y(t)= F(u(t))$$

Οι κατηγορίες συστημάτων είναι πρώτιστα συνδεδεμένες με τη φύση των σημάτων εισόδου και εξόδου αλλά και με την ίδια τη φυσική υπόσταση και τις ιδιαιτερότητες του κάθε συστήματος

Έτσι μπορούμε να δώσουμε επιγραμματικά τις ακόλουθες κατηγορίες συστημάτων

Βασικές κατηγορίες συστημάτων

Ανάλογα με τη φύση των σημάτων εισόδου και εξόδου

Συστήματα συνεχούς χρόνου Η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα συνεχή στο χρόνο. Η δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων περιγράφεται στη γενική περίπτωση από συστήματα γραμμικών ή μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Συστήματα διακριτού χρόνου Η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα που έχουν υποστεί δειγματοληψία στο χρόνο. Η δυναμική συμπεριφορά των συστημάτων περιγράφεται στη γενική περίπτωση από συστήματα γραμμικών ή μη γραμμικών εξισώσεων διαφορών

Ψηφιακά συστήματα Τα συστήματα αυτά είναι συστήματα διακριτού χρόνου με το επιπλέον χαρακτηριστικό ότι οι τιμές των σημάτων εισόδου και εξόδου είναι κβαντισμένες. Τα συστήματα αυτά είναι κατάλληλα για τον έλεγχο με τη βοήθεια υπολογιστή (ή ειδικά σχεδιασμένης ψηφιακής διάταξης)

Βασικές κατηγορίες συστημάτων

Ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας των συστημάτων

Στατικά και δυναμικά συστήματα Στο στατικό σύστημα (ή σύστημα χωρίς μνήμη), το σήμα εξόδου *y(t)*, για κάθε χρονική στιγμή t, εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή του σήματος εισόδου *u(t)*, (Παράδειγμα το Ωμικό στοιχείο R – ***v(t) = I(t)/R.*** Αντίθετα στα δυναμικά συστήματα η έξοδος *y(t)*, για κάθε χρονική στιγμή t, εξαρτάται από τιμές του σήματος εισόδου *u(t) και σε άλλες χρονικές στιγμές*, Δηλαδή τα δυναμικά συστήματα είναι συστήματα με μνήμη (Παράδειγμα η χωρητική αντίσταση C)

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

Χρονικά αμετάβλητα και μεταβαλλόμενα συστήματα. Ένα σύστημα λέγεται χρονικά αμετάβλητο αν και μόνο αν χρονικές καθυστερήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε χρονικές καθυστερήσεις του σήματος εξόδου. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι το σήμα εξόδου παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα από ποια χρονική στιγμή διεγείρουμε την είσοδο με το σήμα *x(t)*. Μαθηματικά η ιδιότητα αυτή εκφράζεται ως εξής

$$y(t) = F(x(t)) \Leftrightarrow y(t - t_0) = F(x(t - t_0))$$

Βασικές κατηγορίες συστημάτων

Ανάλογα με τον τρόπο λειτουργίας των συστημάτων

Αιτιατά συστήματα Ένα σύστημα λέγεται αιτιατό(ή φυσικά υλοποιήσιμο) όταν το σήμα εξόδου εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου στην παρούσα και προηγούμενες χρονικές στιγμές. Με άλλα λόγια μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) ενός συστήματος έπονται των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο (αιτία) (Παράδειγμα η χωρητική αντίσταση C)

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

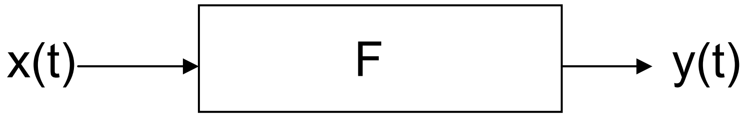
Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα. Ένα σύστημα, που βρίσκεται σε ηρεμία, λέγεται γραμμικό τότε και μόνο τότε όταν δοθέντων δύο σημάτων $x_1(t)$ $x_2(t)$ ισχύει

$$F(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) = \alpha_1 F(x_1(t)) + \alpha_2 F(x_2(t))$$

Δηλαδή η απόκριση στο γραμμικό συνδυασμό εισόδων ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους αποκρίσεων. Η θεωρία των γραμμικών συστημάτων είναι στις μέρες μας ιδιαίτερα αναπτυγμένη, αλλά τα περισσότερα φυσικά συστήματα έχουν μη γραμμική φύση. Γι' αυτό πολλές φορές καταφεύγουμε στη λύση της γραμμικοποίησης μη γραμμικών συστημάτων.

Βασικά προβλήματα θεωρίας συστημάτων

Συνήθως, κατά τη μελέτη των συστημάτων συμβαίνει να γνωρίζουμε (δηλαδή να μας δίνονται), τα δυο από τα τρία στοιχεία του τρίπτυχου **είσοδος-σύστημα- έξοδος** και να ζητείται να υπολογιστεί το τρίτο. Έτσι προκύπτουν τα εξής πολύ γνωστά και βασικά προβλήματα .



$$y(t)= F(u(t))$$

Το πρόβλημα της ανάλυσης. Εδώ δίνεται η είσοδος u(t) και το σύστημα F και ζητείται να υπολογιστεί η έξοδος y(t).

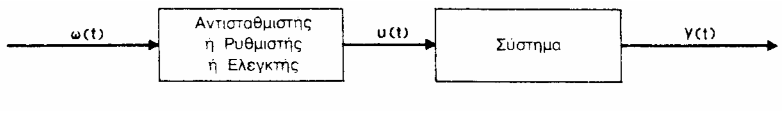
Το πρόβλημα της σύνθεσης. Εδώ δίνεται η είσοδος u(t) και η έξοδος y(t) και ζητείται να υπολογιστεί το σύστημα F

Το πρόβλημα της μέτρησης. Εδώ δίνεται το σύστημα F και η έξοδος y(t) και ζητείται να υπολογισθεί η είσοδος u(t).

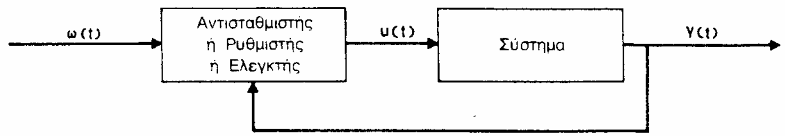
Το πρόβλημα της σχεδίασης ενός ΣΑΕ. Δίνεται το σύστημα F και η επιθυμητή συμπεριφορά του y(t) και ζητείται να βρεθεί μία είσοδος u(t), τέτοια ώστε, αν αυτή εφαρμοσθεί στο σύστημα, η έξοδος του συστήματος y(t) να είναι η προδιαγεγραμμένη επιθυμητή συμπεριφορά. Το πρόβλημα αυτό ανάγεται σε πρόβλημα σύνθεσης

Ανοικτά και κλειστά συστήματα

Ανοικτό σύστημα είναι ένα σύστημα που η είσοδος u(t) δεν είναι συνάρτηση της εξόδου y(t).
Κλειστό σύστημα είναι ένα σύστημα που η είσοδος u(t) είναι συνάρτηση της εξόδου y(t). (ή των καταστάσεων του συστήματος)



Ανοικτό σύστημα



Κλειστό σύστημα

Σε ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου το σήμα εισόδου u(t) δεν παράγεται απ‘ ευθείας από μία γεννήτρια, αλλά είναι η έξοδος ενός πρόσθετου συστήματος που ονομάζουμε **αντισταθμιστή** ή ρυθμιστή ή ελεγκτή.
Στα **ανοικτά συστήματα**, ο αντισταθμιστής διεγείρεται από μία εξωτερική διέγερση ω(τ), η οποία μπορεί να είναι το σήμα μιας γεννήτριας. Είναι δε κατασκευασμένος έτσι ώστε η έξοδος του u(t) να είναι η κατάλληλη διέγερση στο υπό έλεγχο σύστημα που θα προκαλέσει την επιθυμητή έξοδο y(t)
Στα **κλειστά συστήματα**, ο αντισταθμιστής διεγείρεται και από την έξοδο y(t) (ή την κατάσταση x(t), του υπό έλεγχο συστήματος, οπότε η u(t) είναι συνάρτηση και της y(t).

Περιγραφή Συστημάτων με Εξισώσεις Κατάστασης

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει περιλαμβάνει ...

- Βασικούς ορισμούς για την κατάσταση ενός συστήματος και την περιγραφή ενός συστήματος στον χώρο κατάστασης
- Τρόπους επίλυσης δυναμικών εξισώσεων κατάστασης
- Ιδιότητες των περιγραφών στο χώρο κατάστασης
- Πρώτη επαφή με τις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας

Εισαγωγή

Οι σύγχρονες τάσεις στα δυναμικά συστήματα είναι προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης πολυπλοκότητας, κυρίως λόγω των απαιτήσεων των σύνθετων προβλημάτων και της υψηλής ακρίβειας. Τα σύνθετα συστήματα είναι δυνατόν να έχουν πολλές εισόδους και πολλές εξόδους. Τέτοια συστήματα μπορεί να είναι γραμμικά ή μη γραμμικά, μπορεί να είναι χρονικά ανεξάρτητα ή χρονικά μεταβαλλόμενα. Μια πολύ δυναμική προσέγγιση στην αντιμετώπιση τέτοιων συστημάτων είναι η αντιμετώπιση χώρου κατάστασης. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην αρχή της κατάστασης. Η αρχή της κατάστασης δεν είναι καινούρια · υπάρχει για μεγάλο χρονικό διάστημα στο πεδίο της κλασσικής δυναμικής καθώς και σε άλλους τομείς. Η **νέα ιδέα** είναι ο συνδυασμός της αρχής της κατάστασης και της δυνατότητας γρήγορης επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση ψηφιακών υπολογιστών.

Εάν το δυναμικό σύστημα είναι διαμορφωμένο στο χώρο κατάστασης, είναι πολύ εύκολο να προσομοιωθεί σε έναν υπολογιστή και να βρεθεί η λύση των διαφορικών εξισώσεών του. Αυτό συμβαίνει, γιατί η διαμόρφωση χώρου κατάστασης έχει γίνει έχοντας υπόψη ακριβώς τέτοιες υπολογιστικές λύσεις.

Η συνάρτηση μεταφοράς δεν αρκεί.... (Ένα παράδειγμα)

Σταθεροποίηση με απαλοιφή πόλων: Έστω το ασταθές σύστημα 1ης τάξης Μίας εισόδου - Μίας εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s-1}$$

Για την σταθεροποίησή του τοποθετούμε πριν από το αρχικό σύστημα τον αντισταθμιστή

$$H_c(s) = \frac{s\text{-}1}{s+1}$$

οπότε

$$H'(s) = H(s)H_c(s) = \frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1} = H_c(s)H(s)$$

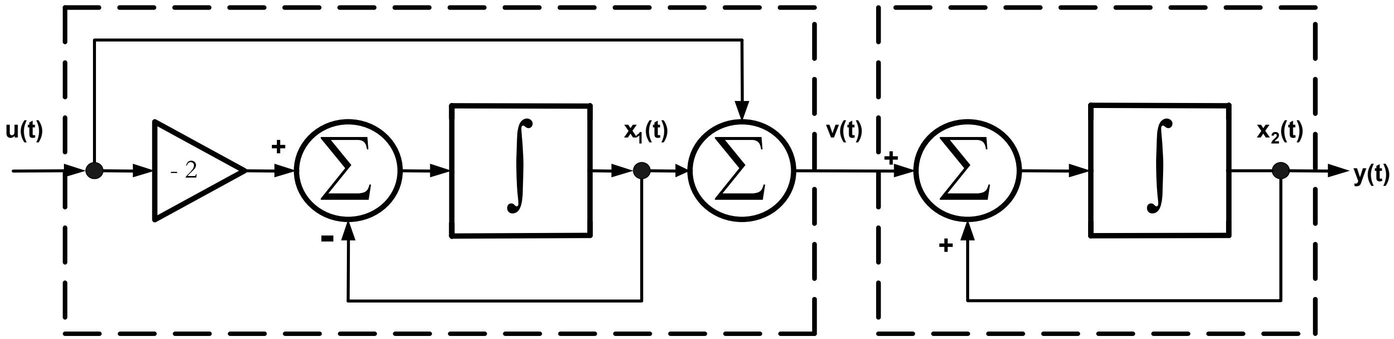
Στην πραγματικότητα όμως ***το σύστημα δεν είναι ευσταθές***. Λίγο μετά την έναρξη λειτουργίας του θα εκραγεί ή θα κορεσθεί.

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΠΡΟΗΓΕΙΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1η Περίπτωση. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τη μορφή

$$H'(s) = H_c(s)\, H(s) = \frac{s-1}{s+1}\,\frac{1}{s-1}$$

Το διάγραμμα προσομοίωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



και διαλέγοντας x1,x2 τις εξόδους των ολοκληρωτών, έχουμε τις εξισώσεις χώρου κατάστασης

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΉΣ ΠΡΟΗΓΕΊΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΉΜΑΤΟΣ ... (2)

Τα δύο υποσυστήματα της προσομοίωσης αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες συναρτήσεις μεταφοράς γιατί ..

$$(1) \quad x_1 = v - u$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2u \;\Rightarrow\; (\dot{v}\text{-}\dot{u}) = \text{-}v + u - 2u \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\dot{v} + v = \dot{u}\text{-}u \;\Rightarrow\; V(s)(s+1) = U(s)(s\text{-}1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; H_c(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s+1}$$

$$(2) \quad x_2 = y$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + v \; = y + v \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\dot{y}\text{-}y = v \;\Rightarrow\; Y(s)(s-1) = V(s) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{s-1}$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΉΣ ΠΡΟΗΓΕΊΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΉΜΑΤΟΣ ... (3)

Για να βρούμε τη συμπεριφορά του συστήματος στο χρόνο έχουμε:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2u \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; sx_1(s) - x_1(0) = -x_1(s) - 2u(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x_1(s)(s+1) = x_1(0) - 2u(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x_1(s) = \frac{x_{10}}{s+1} - 2\frac{1}{s+1}u(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x_1(t) = e^{-t}x_{10} - 2e^{-t} * u(t)$$

Όπου η συνέλιξη ορίζεται από τη σχέση

$$x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Και αν $x_1(t), h(t)$ αιτιατά

τότε

$$x_1(t) * h(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΠΡΟΗΓΕΙΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ... (4)

Για να βρούμε το y(t) έχουμε: **y(t) =x$_2$(t).**

και $$\dot{x}_1 = -x_1 - 2u \Rightarrow sx_1(s) - x_{10} = -x_1(s) - 2u(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(s) = \frac{x_{10} - 2u(s)}{s+1}$$

και $$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u \Rightarrow sx_2(s) - x_{20} = x_1(s) + x_2(s) + u(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(s) = \frac{x_{20}}{s-1} + \frac{x_{10}}{(s-1)(s+1)} + \frac{u(s)(s-1)}{(s+1)(s-1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow y(t) = x_2(t) = x_{20}e^t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})x_{10} + e^{-t} * u(t)}$$

γιατί $$\frac{1}{s^2 - a^2} = \sinh at \Rightarrow \frac{1}{s^2 - 1} = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Ο αντισταθμιστής προηγείται του συστήματος ... Συμπεράσματα

- Στην περίπτωση που οι αρχικές τιμές x_{10}, x_{20}=0 τότε **η y(t) είναι ευσταθής** και η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι πράγματι **1/(s+1).**

- Στην πράξη όμως είναι δύσκολο να κρατήσουμε τις αρχικές τιμές =0 λόγω μικρών τάσεων διαρροών στα διάφορα στοιχεία του συστήματος.

- Κάθε **μη μηδενική αρχική τιμή** με εξαίρεση την $x_{10} = -2\ x_{20}$ **διεγείρει τον ασταθή πόλο [1/(s-1)] -> e^t.**

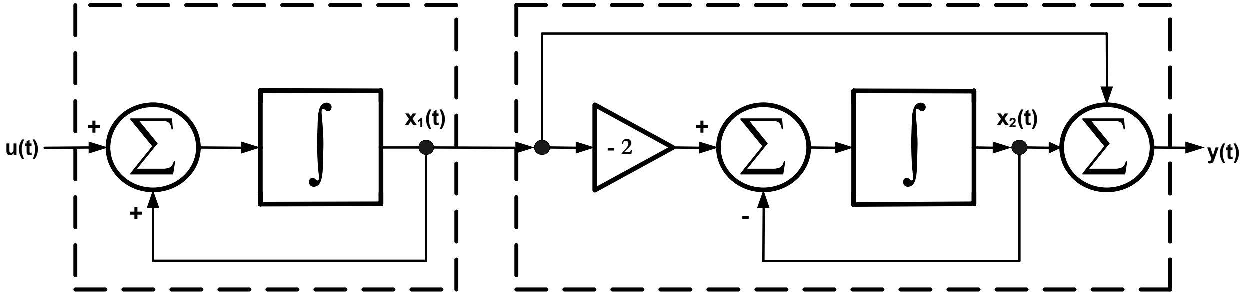
- Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι ότι **η ακριβής απαλοιφή πόλων είναι πολύ δύσκολη** λόγω μικρών μεταβολών στις παραμέτρους των διαφόρων στοιχείων που χρησιμοποιούμε καθώς και σε προσεγγίσεις που έχουν γίνει στο μοντέλο που χρησιμοποιούμε.

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΕΠΕΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ...

2η Περίπτωση. Ο αντισταθμιστής έπεται του συστήματος.

$$H'(s) = H(s)H_c(s) = \frac{1}{s-1}\frac{s-1}{s+1}$$

Διάγραμμα προσομοίωσης:



με χαρακτηριστική εξίσωση $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

από όπου κατά τα προηγούμενα προκύπτει:

$$y(t) = (x_{10} + x_{20})e^{-t} + e^{-t} * u(t)$$

Ο ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗΣ ΕΠΕΤΑΙ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ... (2)

πράγματι

$$\dot{x}_1 = x_1 + u \Rightarrow sx_1(s) - x_{10} = x_1(s) + u(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(s) = \frac{x_{10}}{s-1} + \frac{u(s)}{s\text{-}1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = e^t x_{10} + e^t * u(t) \qquad \to \infty (t \to \infty)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 \Rightarrow sx_2(s) - x_{20} = -2x_1(s) - x_2(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(s)(s+1) = x_{20} - 2x_1(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(s) = \frac{x_{20}}{s+1} - \frac{-2x_{10}}{(s-1)(s+1)} - \frac{2u(s)}{(s-1)(s+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = x_{20}e^{-t} - x_{10}(e^t - e^{-t}) - e^t * u(t) + e^{-t} * u(t)$$

οπότε

$$\boxed{y(t) = x_1(t) + x_2(t) = (x_{10} + x_{20})e^{-t} + e^{-t} * u(t)}$$

Ο αντισταθμιστής έπεται του συστήματος ... Συμπεράσματα

- Η τελευταία έκφραση του y(t) (2ο σύστημα) δείχνει ότι το σύστημα είναι **"εξωτερικά" ευσταθές** ακόμη και αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές. Το σύστημα όμως παραμένει **"εσωτερικά" ασταθές** αφού οι μεταβλητές κατάστασης περιέχουν όρους που αυξάνονται ανάλογα με τον εκθετικό όρο e^t.

- **Εσωτερική περιγραφή**: πιο πολύπλοκη από την αντίστοιχη εξωτερική (εισόδων-εξόδων) και καθορίζεται από το σύνολο των φυσικών συχνοτήτων του συστήματος.

s = -1,1

- **Εξωτερική περιγραφή**: μετά την απαλοιφή πόλων δεν εμφανίζονται οι κρυμμένοι πόλοι στην εξωτερική περιγραφή. Απομένει μόνο η συχνότητα

s = -1.

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μία εξωτερική περιγραφή, ορίζεται με μηδενικές αρχικές συνθήκες και δεν εμφανίζει τους κρυμμένους πόλους.

Διαφορές πρώτης και δεύτερης υλοποίησης .

- **1η μορφή**. Ο ασταθής πόλος είναι **παρατηρήσιμος** επειδή εμφανίζεται στην έξοδο και **μη ελέγξιμος** επειδή η εξωτερική είσοδος v(t) δεν μπορεί να τον επηρεάσει.

(ανιχνεύσιμο- μη σταθεροποιήσιμο)

- **2η μορφή**. Ο ασταθής πόλος είναι **μη παρατηρήσιμος** αλλά **ελέγξιμος**.

(μη ανιχνεύσιμο- σταθεροποιήσιμο)

Ελεγξιμότητα και Παρατηρησιμοτητα ... μια πρώτη γεύση

- Ένα σύστημα **είναι ελέγξιμο** στον χρόνο t_o αν είναι δυνατό μέσω ενός διανύσματος ελέγχου (είσοδο) να μεταφέρουμε το σύστημα από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση x(to) σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση μέσα σε ένα πεπερασμένη χρονικό διάστημα.

- Το σύστημα **είναι παρατηρήσιμο** στο χρόνο to αν με το σύστημα στην κατάσταση x(to), είναι δυνατό να προσδιορισθεί αυτή η κατάσταση από την παρατήρηση της εξόδου πάνω σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

- Γενικά:

Η **ελεγξιμότητα** του συστήματος αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο **οι είσοδοι (ή οι ελεγχόμενες μεταβλητές εισόδου) επηρεάζουν το σύστημα**, ενώ
Η **παρατηρησιμότητα** του συστήματος αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο **οι έξοδοι (ή οι μετρούμενες μεταβλητές εξόδου) πληροφορούν για την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος**.

Εξισώσεις κατάστασης – Βασικοί Ορισμοί

Κατάσταση.

Η κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος είναι το μικρότερο σύνολο μεταβλητών (οι οποίες καλούνται μεταβλητές κατάστασης), η γνώση των οποίων τη χρονική στιγμή $t = t_0$, καθώς και η γνώση της εισόδου για $t >= t_0$ καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t >= t_0$.

Γι' αυτό το λόγο η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την κατάσταση τη χρονική στιγμή t_0 και την είσοδο για $t >= t_0$ και είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση και την είσοδο πριν από τη χρονική στιγμή t_0. Στην ενασχόληση με γραμμικά, χρονικώς ανεξάρτητα συστήματα συνηθίζεται η χρονική στιγμή αναφοράς να επιλέγεται ίση με το μηδέν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αρχή της κατάστασης δεν περιορίζεται σε καμία περίπτωση στα φυσικά συστήματα. Εφαρμόζεται σε βιολογικά, οικονομικά, κοινωνικά και άλλα συστήματα.

Μεταβλητές κατάστασης.

Οι μεταβλητές κατάστασης ενός δυναμικού συστήματος είναι οι μεταβλητές οι οποίες απαρτίζουν το μικρότερο σύνολο μεταβλητών που καθορίζουν την κατάσταση του δυναμικού συστήματος. Εάν απαιτούνται τουλάχιστον *n* μεταβλητές για να περιγραφεί πλήρως η συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος, τότε αυτές οι *n* μεταβλητές είναι το σύνολο των μεταβλητών κατάστασης. Είναι σημαντικό ότι μεταβλητές οι οποίες δεν περιγράφουν φυσικές ποσότητες μπορούν να επιλεγούν ως μεταβλητές κατάστασης.

Βασικοί Ορισμοί

Διάνυσμα κατάστασης.

Εάν *n* μεταβλητές απαιτούνται για την πλήρη περιγραφή της συμπεριφοράς ενός δοσμένου συστήματος, τότε αυτές ο *n* μεταβλητές κατάστασης μπορούν να θεωρηθούνε ως τα *n* στοιχεία ενός διανύσματος **x**. Ένα τέτοιο διάνυσμα καλείται διάνυσμα κατάστασης. Γι’ αυτόν ακριβώς το λόγο ένα διάνυσμα κατάστασης είναι το διάνυσμα που καθορίζει με μοναδικό τρόπο την κατάσταση του συστήματος **x**(t) για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t >= \tau_0$, εφόσον δίνεται η είσοδος **u**(t) για $t >= \tau_0$ και η κατάσταση του συστήματος για $t = \tau_0$.

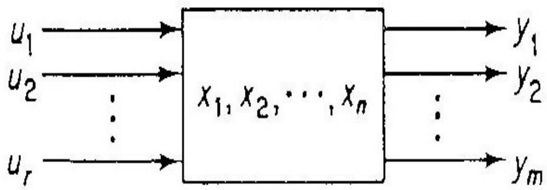
Χώρος κατάστασης.

Ο *n*- διάστατος χώρος του οποίου οι άξονες συντεταγμένων είναι οι άξονες x_1, x_2, …, x_n ονομάζεται χώρος κατάστασης

Εξισώσεις χώρου κατάστασης

Στην ανάλυση του χώρου κατάστασης υπάρχει ενδιαφέρον για τρεις τύπους μεταβλητών οι οποίοι εμπλέκονται στο μοντέλο των δυναμικών συστημάτων: μεταβλητές εισόδου, μεταβλητές εξόδου και μεταβλητές κατάστασης. Η αναπαράσταση του χώρου κατάστασης για ένα δοσμένο σύστημα δεν είναι μοναδική, με εξαίρεση ότι ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε από τις διαφορετικές απεικονίσεις του χώρου κατάστασης του ίδιου συστήματος.

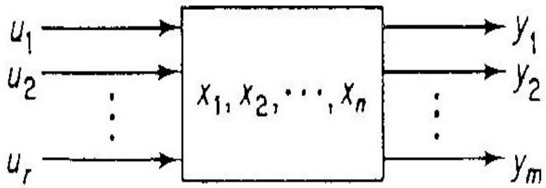
Οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα μπορεί να περιλαμβάνει έναν ολοκληρωτή ή ολοκληρωτές. Τέτοιοι ολοκληρωτές κρατάνε στη μνήμη την εσωτερική κατάσταση του συστήματος. Γι' αυτό οι έξοδοι τέτοιων μεταβλητών μπορούν να θεωρηθούν ως μεταβλητές οι οποίες καθορίζουν την εσωτερική κατάσταση του δυναμικού συστήματος. Επομένως οι έξοδοι των ολοκληρωτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μεταβλητές κατάστασης. Ο αριθμός των μεταβλητών που καθορίζουν πλήρως τη δυναμική του συστήματος είναι ίσος με τον αριθμό των ολοκληρωτών που συμμετέχουν στο σύστημα.



Υποθέστε πως σε ένα σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων συμμετέχουν *n* ολοκληρωτές. Υποθέστε, επίσης, ότι υπάρχουν r είσοδοι $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$

και m έξοδοι $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$

Εξισώσεις χώρου κατάστασης



Οι n έξοδοι των ολοκληρωτών ορίζονται ως οι μεταβλητές κατάστασης: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

Τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$

Οι έξοδοι του συστήματος μπορούν να είναι συναρτήσεις των μεταβλητών κατάστασης, των μεταβλητών εισόδου και του χρόνου. Γι' αυτό οι έξοδοι μπορούν να γραφτούν και με τον παρακάτω τρόπο:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$
$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots u_r; t)$$

Ή σε πιο συμπαγή μορφή

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2)$$

όπου

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_r(t) \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix}^T$$

Εξισώσεις χώρου κατάστασης

και όπου

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \\ \\ \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)=\begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \\ g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \\ \\ \\ g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;u_1,u_2,u_r;t) \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση (1) είναι η εξίσωση κατάστασης και η εξίσωση (2) είναι η εξίσωση εξόδου. Εάν οι διανυσματικές συναρτήσεις **f** και **g** περιλαμβάνουν σαφώς το χρόνο t, τότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο. Εάν το σύστημα είναι γραμμικό, τότε οι εξισώσεις (1) και (2) παίρνουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad \textbf{(3)}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad \textbf{(4)}$$

όπου **A**(t) ονομάζεται ο πίνακας κατάστασης, **B**(t) ο πίνακας εισόδου, **C**(t) ο πίνακας εξόδου και **D**(t) ο άμεσος μεταβατικός πίνακας. Εάν οι διανυσματικές συναρτήσεις **f** και **g** δεν περιλαμβάνουν σαφώς το χρόνο t, τότε το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο. Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις (1-2) και (3-4) μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \qquad \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \qquad \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Ένα παράδειγμα ...

Θεωρείστε ένα δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τη σχέση $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$

όπου y είναι η έξοδος και u η είσοδος του συστήματος. Θέλουμε να περιγράψουμε το σύστημα στον χώρο κατάστασης

Παρατηρούμε ότι η γνώση των $y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0)$ και της εισόδου u(t) για t>=0 καθορίζει επακριβώς τη μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος. Γι' αυτό οι $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν μεταβλητές κατάστασης. Δηλαδή,

$$x_1 = y \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = \ddot{y}$$

οπότε

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

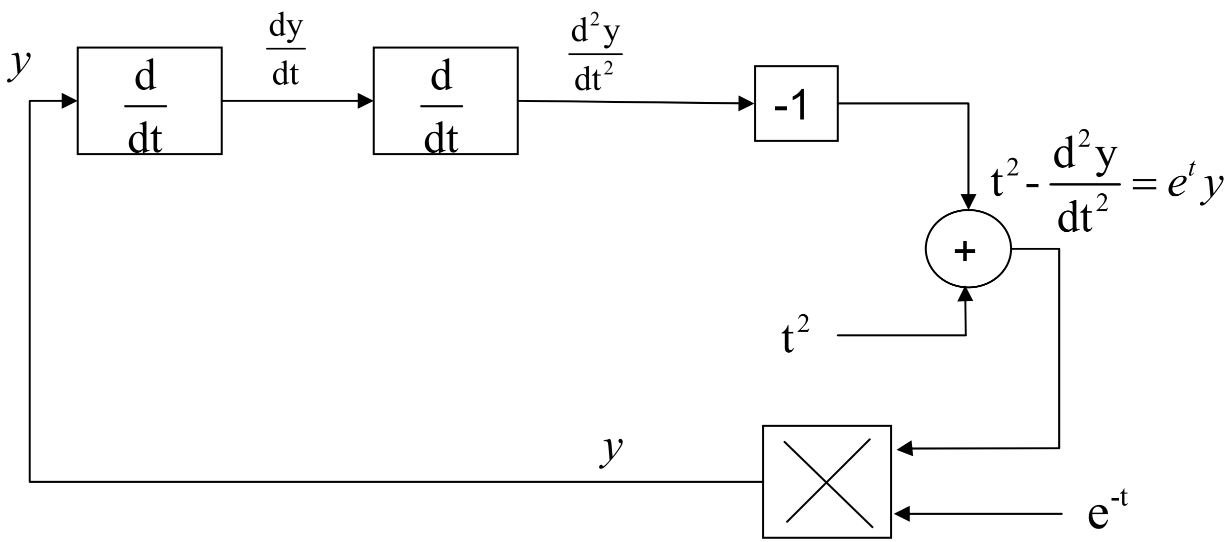
Ή σε πινακοδιανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Πραγματώσεις (Realizations)

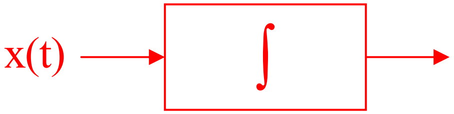
Οι πραγματώσεις (realizations) μιας συνάρτησης μεταφοράς ή διαφορικής εξίσωσης συνεχούς χρόνου με αναλογικό υπολογιστή ή μιας συνάρτησης διακριτού χρόνου με ένα ψηφιακό φίλτρο είναι προσομοιώσεις των πραγματικών συστημάτων και είναι πολύ χρήσιμες για την ανάλυση και μελέτη της συμπεριφοράς των συστημάτων.
Επειδή οι διαφοριστές υλοποιούνται μόνο κατά προσέγγιση και επιπλέον εισάγουν κρουστικές συναρτήσεις (ενισχύουν και το θόρυβο που τείνει να υπερισχύσει του σήματος), επιδιώκουμε την αποφυγή της χρήσης τους και προτιμούμε τους ολοκληρωτές.

Πραγμάτωση της $\frac{d^2y}{dt^2} + e^t y = t^2$ με διαφοριστές



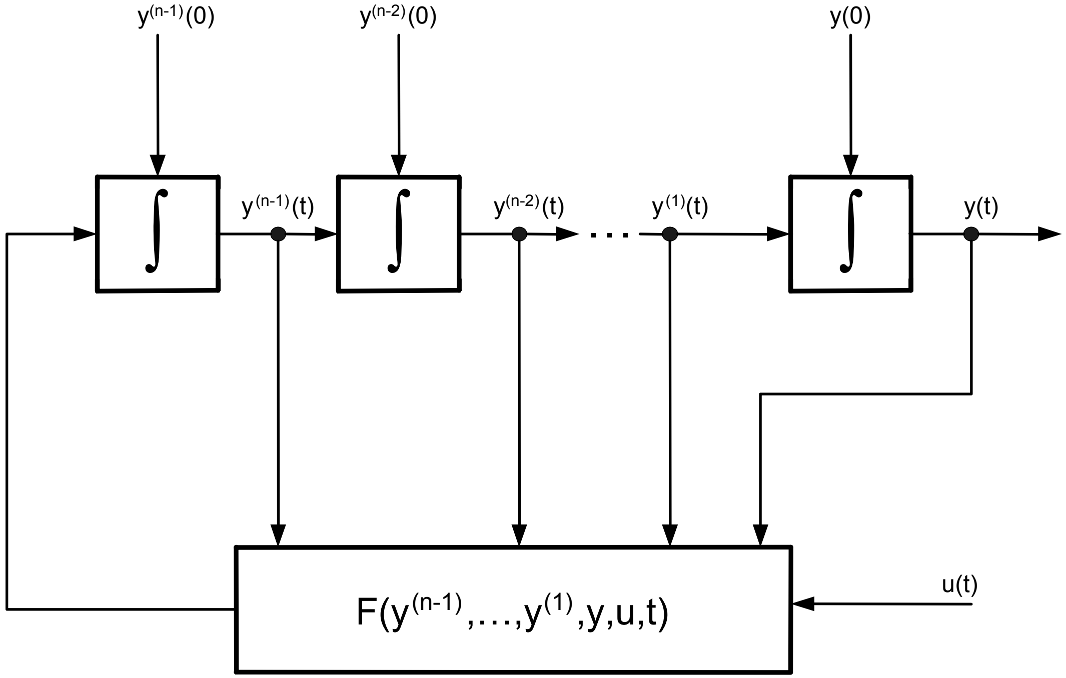
Μηχανή του Kelvin

Για αιτιατά συστήματα που περιγράφονται από την $y^{(n)} = f(y^{(n-1)}(t),\ldots y^{(1)}(t), y(t), u(t), t)$
ο Kelvin έκανε την υπόθεση ότι το βασικό δομικό του στοιχείο μπορεί να είναι ο ολοκληρωτής για τον οποίο έχουμε



$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau \qquad \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Για να παράγουμε το διάγραμμα προσομοίωσης του διπλανού σχήματος υποθέτουμε ότι έχουμε το $y^{(n)}(t)$ και παράγουμε τις μικρότερες παραγώγους μετά από διαδοχικές ολοκληρώσεις οπότε έχουμε



Αν στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα περιέχονται και παράγωγοι της εισόδου η διάταξη Kelvin δεν επαρκεί γιατί χρειάζονται και διαφοριστές για τις παραγώγους της εισόδου.

Πραγματώσεις γραμμικών συστημάτων γενικής μορφής

Στη γενική περίπτωση το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_n y(t)=b_1 u^{(m)}(t)+b_2 u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_{m+1}u(t)$$

γενικά προτιμούμε **m<n** γιατί η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει ότι **δεν εμφανίζονται κρουστικές αποκρίσεις και παράγωγοι της εισόδου στην έξοδο του συστήματος**.

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$

επειδή η τάξη του αριθμητή είναι μεγαλύτερη της τάξης του παρανομαστή διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρανομαστή και παίρνουμε $G(s)=s+2+\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

υπολογισμός κανονικής τάξης παρανομαστή > τάξης αριθμητή

Έχοντας υπόψη ότι ο μετ/μός Laplace της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης δ(t) είναι 1

$L[\delta(t)]=1$ και ότι $L\left[\dfrac{d}{dt}\delta(t)\right]=s$ έχουμε $g(t)=\dfrac{d}{dt}\delta(t)+2\delta(t)+2e^{-t}-2e^{-2t}\quad (t\geq 0^-)$

επειδή δε $y(t)=g(t)*u(t)$ και $x(t)*\delta(t)=x(t)$

$$y(t)=\frac{d}{dt}u(t)+2u(t)+2e^{-t}*u(t)-2e^{-2t}*u(t)\quad (t\geq 0^-)$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα χρήσης διαφοριστών όταν στην διαφ. εξίσωση υπάρχουν παράγωγοι της εισόδου, έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι.
Τέσσερις πραγματώσεις γραμμικών συστημάτων (πραγματώσεις κανονικών μορφών) παρουσιάζονται παρακάτω.

<u>Α. πρώτη προσέγγιση</u> : Με χρήση υπέρθεσης.

Έστω το τρίτης τάξης σύστημα: (για μεγαλύτερες τάξεις η μέθοδος είναι ίδια)

$$y^{(3)}+\alpha_1 y^{(2)}+\alpha_2 y^{(1)}+\alpha_3 y=b_3 u+b_2 u^{(1)}+b_1 u^{(2)} \tag{1}$$

Εισάγουμε τη νέα βοηθητική μεταβλητή **W** για την οποία υποθέτουμε ότι πληροί την:

$$w^{(3)}+\alpha_1 w^{(2)}+\alpha_2 w^{(1)}+a_3 w=u \tag{2}$$

τότε λόγω γραμμικότητας έχουμε ότι με αντικατάσταση του **u** στο δεύτερο μέρος της (1)παίρνουμε

$$y=b_3 w+b_2 w^{(1)}+b_1 w^{(2)} \tag{3}$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες για τις (1) και (2) είναι μηδέν.

$$\left.\begin{array}{l}\text{το } b_3 u \ \text{ μας δίνει τον όρο } \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 b_3 w \\ \text{το } b_2 u^{(1)} \ \text{ μας δίνει τον όρο } \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 b_2 w^{(1)} \\ \text{το } b_1 u^{(2)} \ \text{ μας δίνει τον όρο } \alpha_3 \rightarrow \alpha_3 b_1 w^{(2)}\end{array}\right\}+$$

$$\alpha_3 y=a_3(b_3 w+b_2 w^{(1)}+b_1 w^{(2)}) \ \Rightarrow \ y=b_3 w+b_2 w^{(1)}+b_1 w^{(2)}$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις ...

Συνέχεια και Γενίκευση:

Το σύστημα **(S)** $y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_n y(t) =$
$= b_1 u^{(m)}(t)+b_2 u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_{m+1}u(t)$ (1)

με συνάρτηση μεταφοράς $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{b(s)}{\alpha(s)}=\dfrac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1}+\ldots+b_{m+1}}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_n}$

μπορεί να προκύψει από την εν σειρά λειτουργία δύο συστημάτων **S1** και **S2**.
Για το σύστημα **S1** εισάγουμε τη βοηθητική μεταβλητή **w(t)** και το **S1** περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

S_1: $w^{(n)}(t)+\alpha_1 w^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_{(n-1)}w^{(1)}(t)+\alpha_n w(t) = u(t)$ (2)

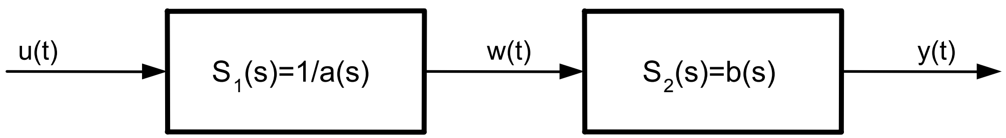
Αν από τη (2) αντικαταστήσουμε το u(t) και τις παραγώγους του στην (1) προκύπτει το δεύτερο σύστημα.

S_2: $y(t) = b_1 w^{(m)}(t)+b_2 w^{(m-1)}(t)+\ldots+b_{m+1}w(t)$ (3)

Η συνάρτηση μεταφοράς του $S_1 : S_1(s)=\dfrac{W(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{\alpha(s)}$ Όπου $\alpha(s) = s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\ldots+\alpha_n$

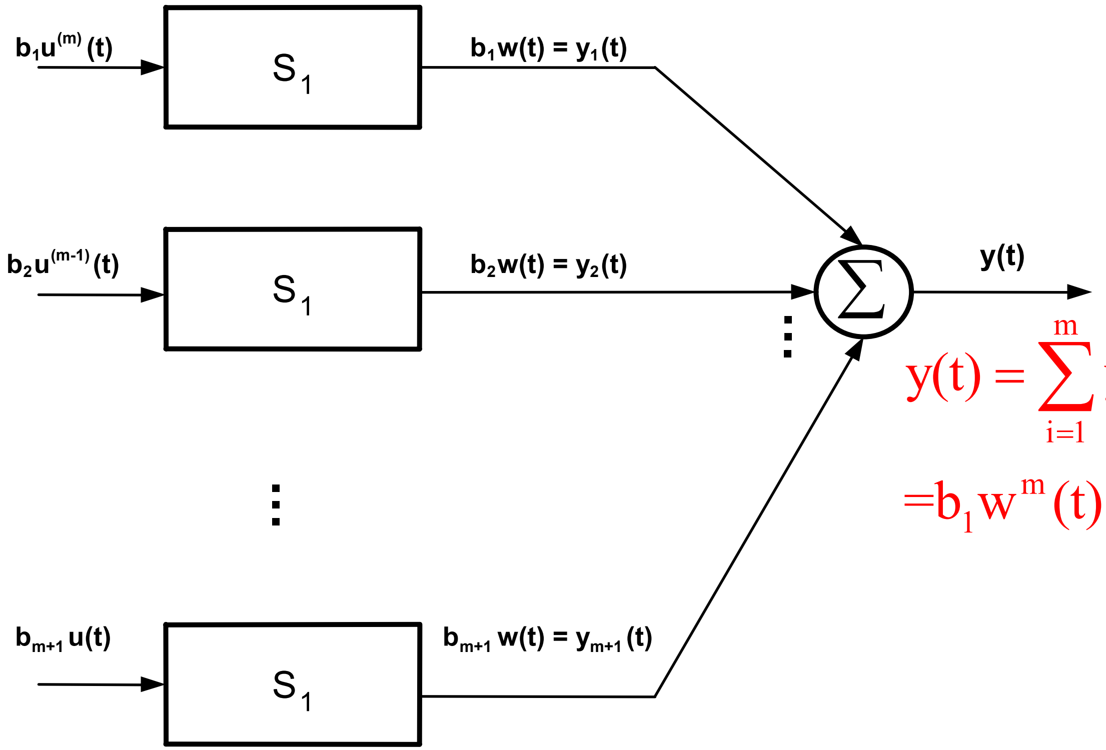
ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του S_2: $S_2(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=b(s)$ όπου $b(s)=b_1 s^m+b_2 s^{m-1}+\ldots+b_{m+1}$

Το συνολικό σύστημα είναι το $S(s)=\left[\dfrac{1}{\alpha(s)}\right]b(s)$



Εναλλακτικές πραγματώσεις ...

πράγματι.
Το **S1** έχει απόκριση **w(t)** στην έξοδο **u(t)**.
Επιπλέον η **w(t)** παριστάνει το τμήμα της εξόδου **y(t)**, που αντιστοιχεί στην έξοδο που θα παρουσιαζόταν αν είχαμε μόνο την **u(t)** στο δεξιό μέλος της (1).
Κατ΄ αναλογία η $\mathbf{w^{(n-i)}(t)}$, i=1,2,…,m-1 παριστάνει το τμήμα της εξόδου **y(t)** που θα παρουσιαζόταν αν είχαμε μόνο την $\mathbf{u^{(m-i)}(t)}$ στο δεξιό μέλος της (1).
Επομένως λόγω υπερθέσεως έχουμε

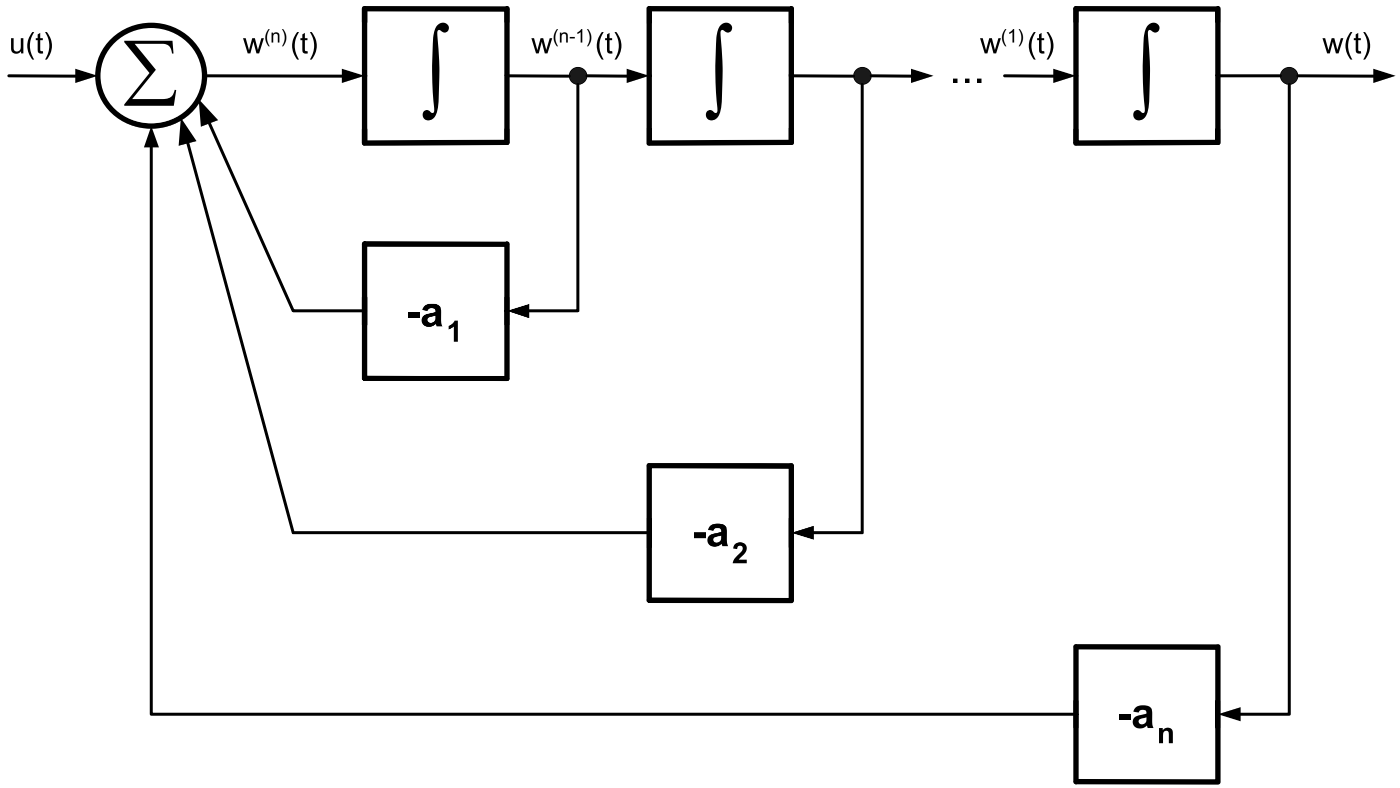


$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i(t) =$$

$$= b_1 w^m(t) + b_2 w^{m-1}(t) + \ldots + b_{m+1} w(t)$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις ...

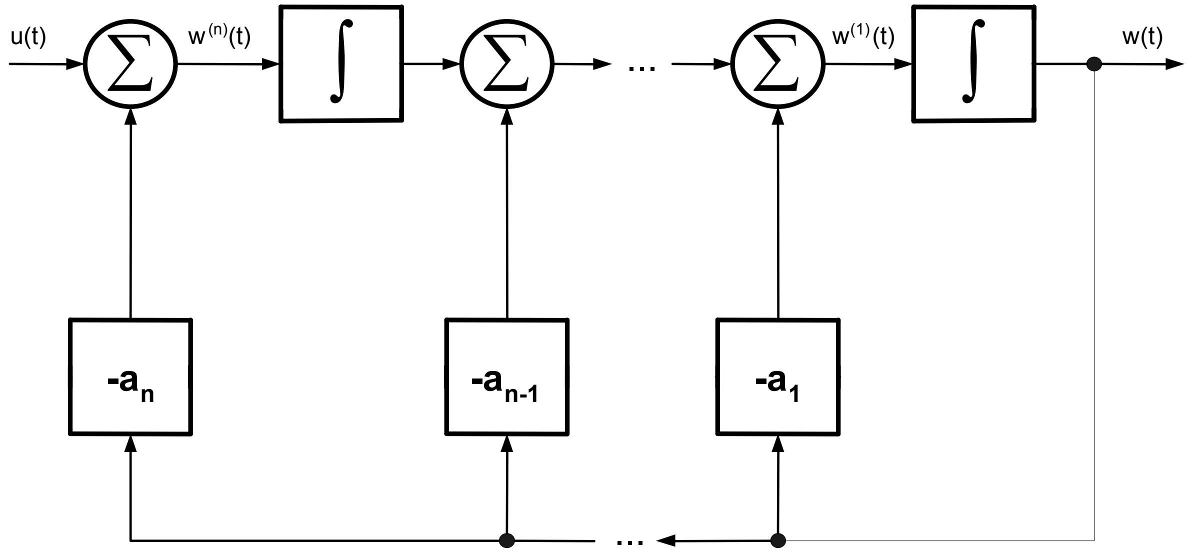
Το σύστημα **S1** πραγματώνει με δύο μορφές:
τη μορφή "ανάδραση στην είσοδο" (παρακάτω σχήμα).



Η συσχέτιση της εξίσωσης του **S1** με το σχήμα είναι προφανής.

Εναλλακτικές πραγματώσεις ...

και τη μορφή "ανάδραση στις καταστάσεις" (στο παρακάτω σχήμα)



Για τη συσχέτισή της εξίσωσης περιγραφής του **S1** με το σχήμα κάνουμε λίγες πράξεις :

(1ος αθροιστής από δεξιά) $w^{(1)}(t) = -\alpha_1 w(t) + \xi_1(t) \Rightarrow w^{(1)}(t) + \alpha_1 w(t) = \xi_1(t)$

(2ος αθροιστής από δεξιά) $\xi_1^{(1)}(t) + \alpha_2 w(t) = \xi_2(t) \Rightarrow w^{(1)}(t) + \alpha_1 w^{(1)}(t) + \alpha_2 w(t) = \xi_2(t)$

$$\xi_2^{(1)}(t) + \alpha_3 w(t) = \xi_3(t) \Rightarrow w^{(3)}(t) + \alpha_1 w^{(2)}(t) + \alpha_2 w^{(1)}(t) + \alpha_3 w(t) = \xi_3(t)$$

.

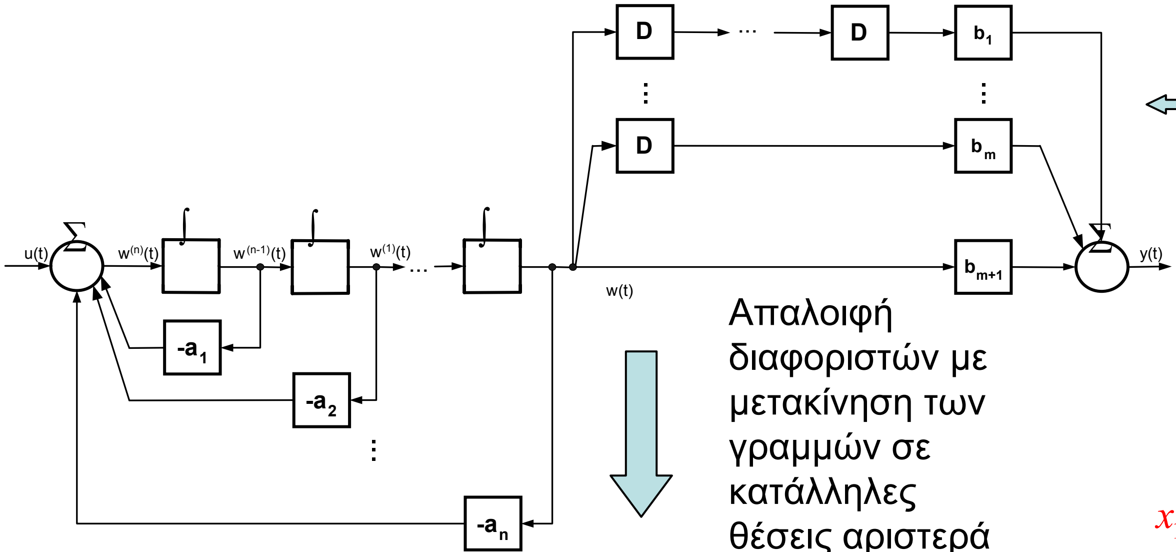
.

.

$$w^{(n)}(t) + \alpha_1 w^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_{(n-1)} w^{(1)}(t) + \alpha_n w(t) = u(t)$$

Κανονική Ελέγξιμη Μορφή (Controller Canonical Form)

Λέγεται η πραγμάτωση όπου το **S1** πραγματώνεται με ανάδραση στην είσοδο.

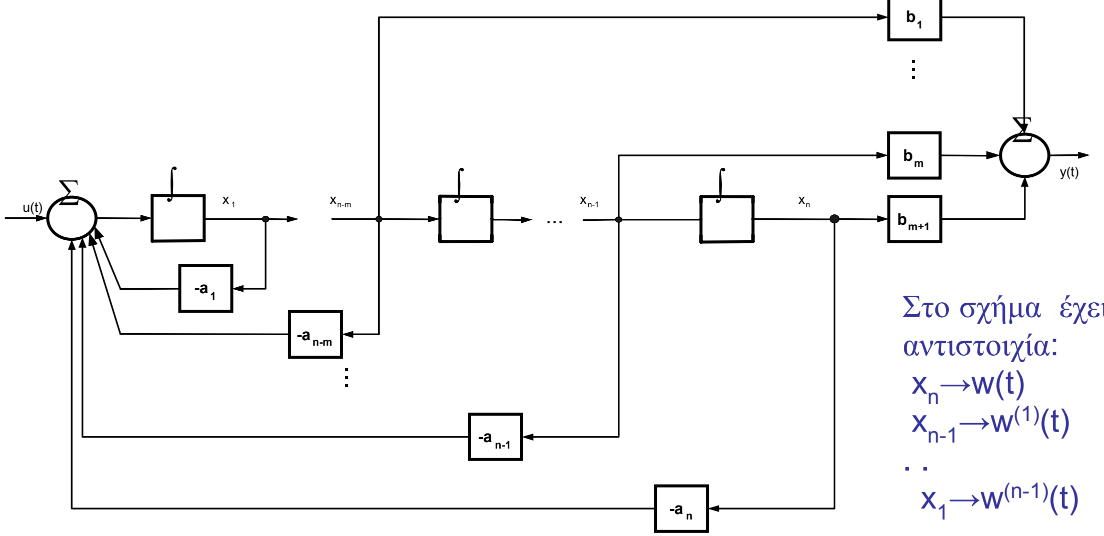


Πραγμάτωση του S2 με διαφοριστές

Απαλοιφή διαφοριστών με μετακίνηση των γραμμών σε κατάλληλες θέσεις αριστερά

Εξισώσεις κατάστασης

$$x(t) = A_c x(t) + b_c u(t)$$
$$y(t) = c_c x(t)$$



$$x_1 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_n x_2 - \ldots - a_n x_n + u$$
$$x_2 = x_1$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1}$$
$$y = b_1 x_{n-m} + b_2 x_{n-m+1} + \ldots + b_{m+1} x_n$$

Στο σχήμα έχει γίνει η αντιστοιχία:

$x_n \rightarrow w(t)$

$x_{n-1} \rightarrow w^{(1)}(t)$

. .

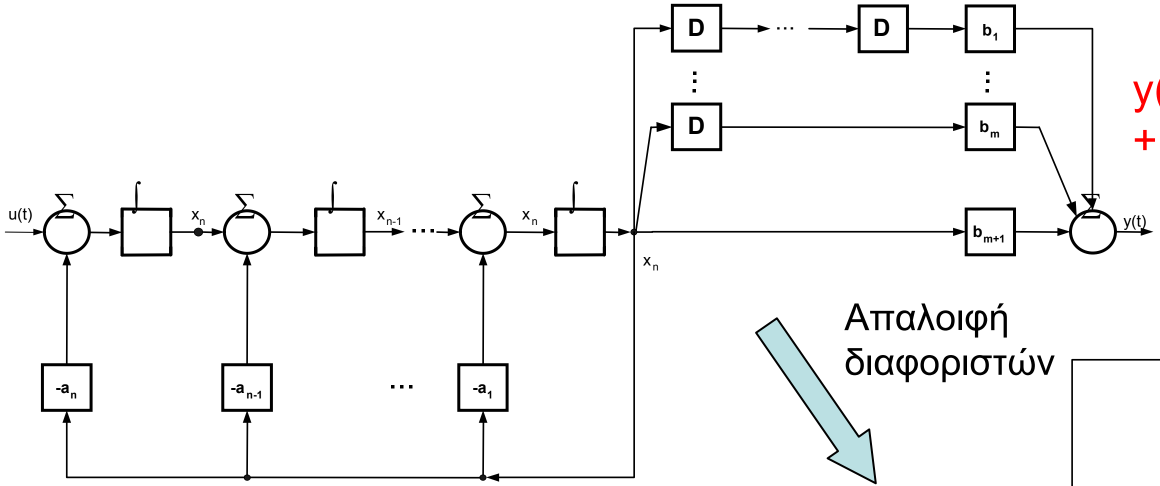
$x_1 \rightarrow w^{(n-1)}(t)$

$$c_c = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \ldots 0}^{n-m-1} & b_1 & b_2 & \ldots & b_{m+1} \end{bmatrix}$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις Κανονική Μορφή Ελεγξιμότητας

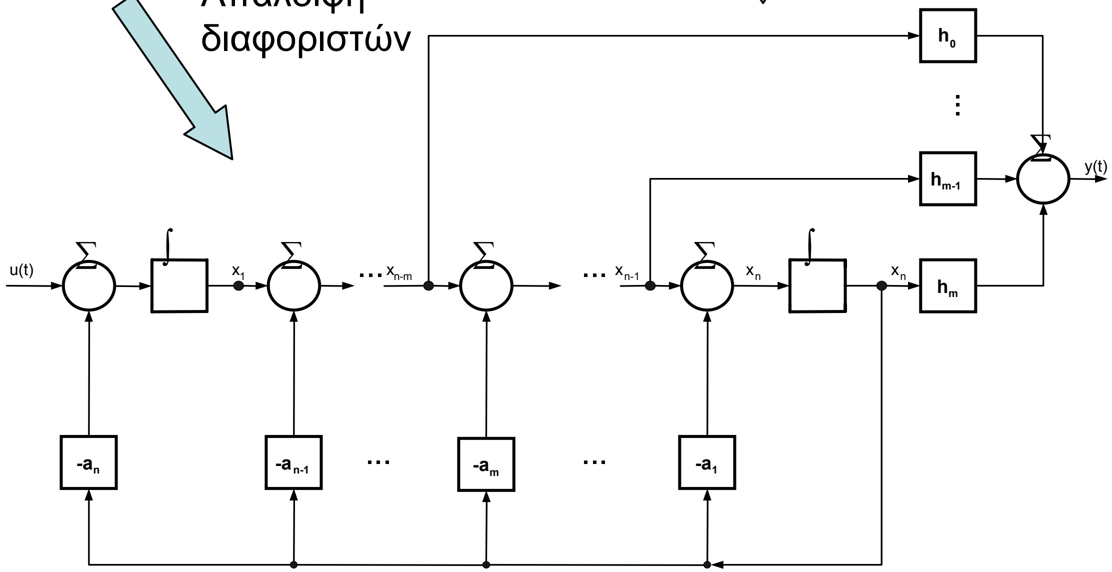
(Controlability Canonical Form)

Όταν το **S1** πραγματώνεται με ανάδραση στις καταστάσεις τότε καταλήγουμε στην παρακάτω πραγμάτωση που ονομάζεται Κανονική Μορφή Ελεγξιμότητας:



$$y(t) = b_1 x_n^{(m)}(t)+b_2\, x_n^{(m-1)}(t)+\ldots +b_m x_n^{(1)}(t)+ b_{m+1}x_n(t) \qquad (1)$$

Απαλοιφή διαφοριστών



$$\dot{x}_1 = u(t) - \alpha_n x_n(t) \qquad (2)$$

$$\dot{x}_i(t) = x_{i-1}(t) - \alpha_{n-i+1} x_n(t)$$

$$i = 2,3,\ldots,n \qquad (3)$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις Κανονική Μορφή Ελεγξιμότητας

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους $x_n^{(i)}(t)$, i=1,2,…,m στην (1) χρησιμοποιώντας τις (2),(3) τότε η(1) γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων $x_{n-i}(t)$, i=0,1,..,m ως εξής

$$y(t)=h_o x_{n-m}(t)+h_1 x_{n-m+1}(t)+\ldots+h_{m-1}x_{n-1}(t)+h_m x_n(t) \qquad (4)$$

όπου οι παράμετροι h_i, i=0,1,…,m συνδέονται με τους συντελεστές b_i, i=0,1,…,m+1 μέσω της σχέσης

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_{m-1} & \alpha_{m-2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Οι παράμετροι hi είναι οι παράμετροι Markov:

$$H(s)=\frac{b(s)}{\alpha(s)}=\sum_{i=0}^{\infty} h_i s^{-i-1}, \qquad |s|>0$$

Εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x}(t)=A_{c0}x(t)+b_{c0}u(t)$$

$$y(t)=c_{c0}x(t)$$

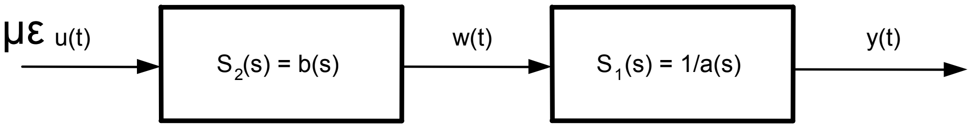
$$\mathbf{A_{c0}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -a_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b_{c0}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_{c0}}=\begin{bmatrix} \overbrace{0 \ \ldots \ 0}^{n-m-1} & h_0 & h_1 & \ldots & h_m \end{bmatrix}$$

Στις κανονικές μορφές (ελέγξιμη και ελεγξιμότητας) η είσοδος εισέρχεται σε κάθε ολοκληρωτή, είτε απ΄ ευθείας, είτε μετά από ορισμένες προηγούμενες ολοκληρώσεις χωρίς τη μεσολάβηση άλλων γραμμικών τελεστών.
Συνεπώς **κάθε μεταβαλλόμενη κατάσταση είναι ελέγξιμη**, με την έννοια ότι μπορεί να επηρεασθεί μονοσήμαντα από την είσοδο.

Εναλλακτικές πραγματώσεις Κανονική παρατηρήσιμη μορφή

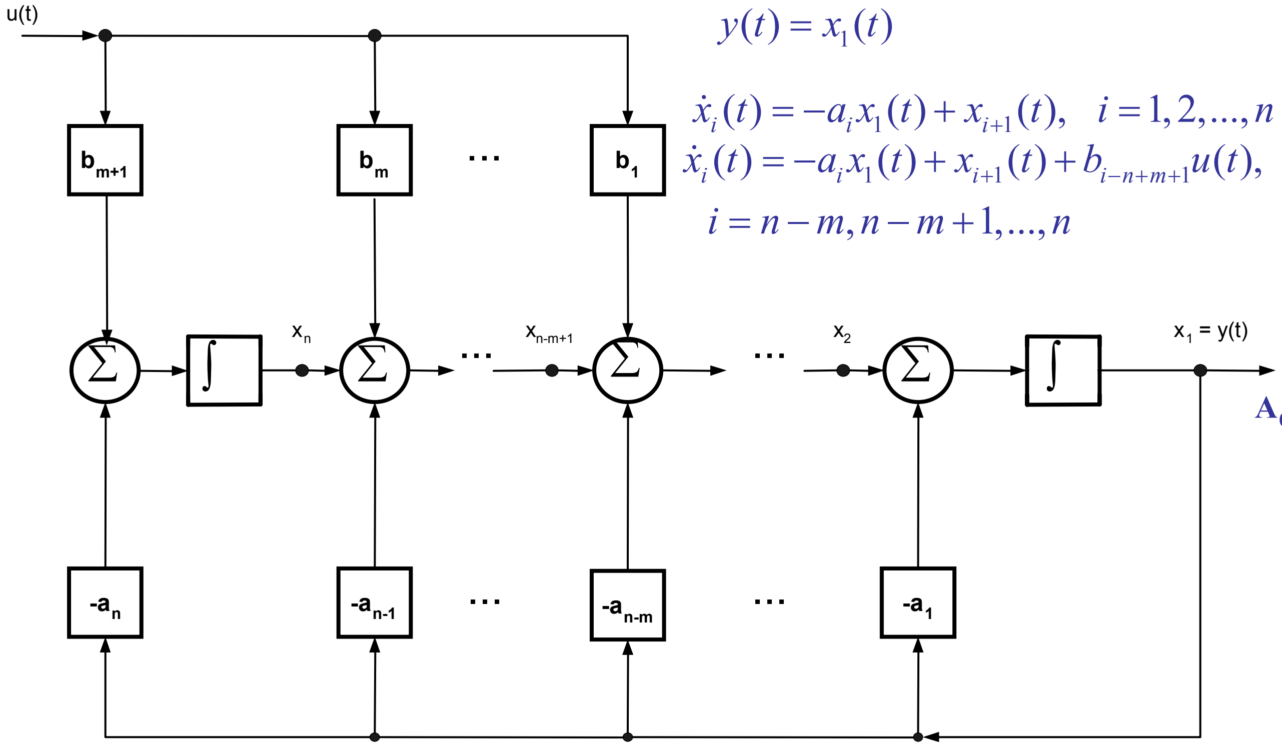
Επειδή τα υποσυστήματα **S1**, **S2** είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά τους και να καταλήξουμε πάλι στο σύστημα **S**



Το συνολικό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$S(s) = S_2(s).S_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}.\frac{W(s)}{U(s)} = b(s)\left[\frac{1}{a(s)}\right]$$

Αν το **S1** υλοποιείται με ανάδραση στις καταστάσεις



$$y(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_1(t) + x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-m-1$$

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_1(t) + x_{i+1}(t) + b_{i-n+m+1}u(t),$$

$$i = n-m, n-m+1, \ldots, n$$

Εξισώσεις κατάστασης

$$x(t) = A_0 x(t) + b_0 u(t)$$

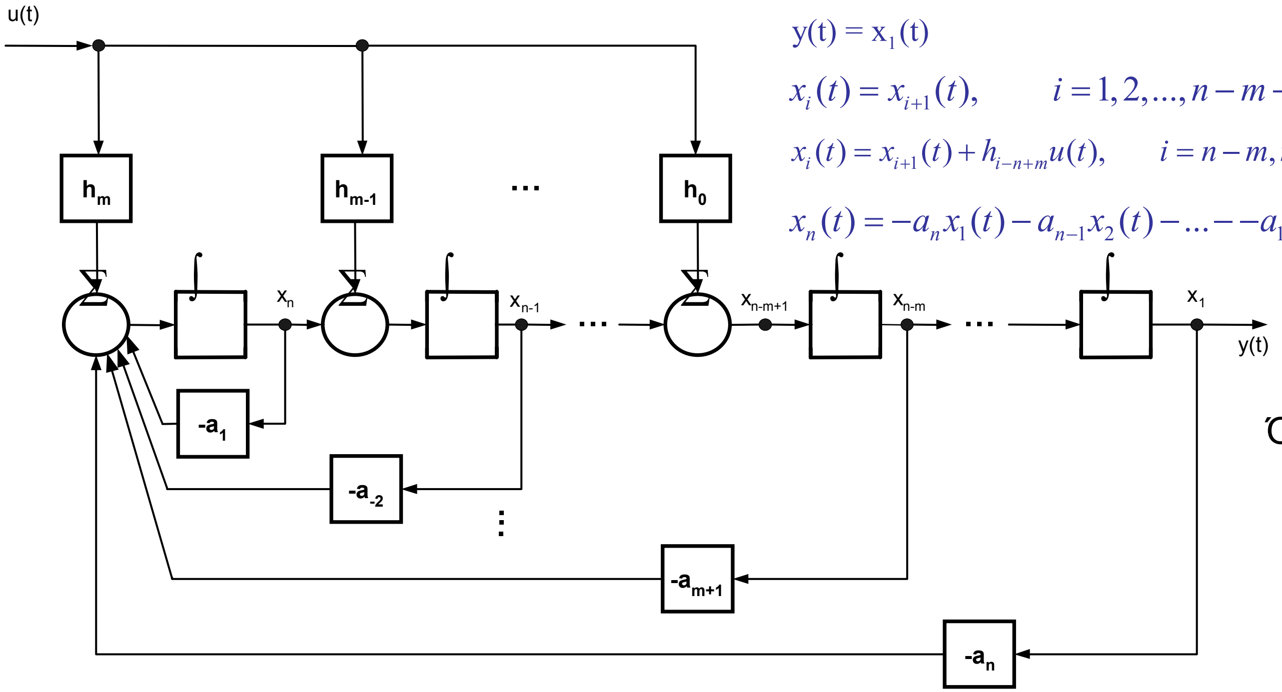
$$y(t) = c_0 x(t)$$

$$\mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Εναλλακτικές πραγματώσεις Κανονική μορφή παρατηρησιμότητας

Όταν στην προηγούμενη περίπτωση (το **S2** προηγείται του **S1**) το **S1** υλοποιείται με ανάδραση στην είσοδο, έχουμε την κανονική μορφή παρατηρησιμότητας



$$y(t) = x_1(t)$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m-1$$

$$x_i(t) = x_{i+1}(t) + h_{i-n+m}u(t), \qquad i = n-m, n-m-1, \ldots, n-1$$

$$x_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1}x_2(t) - \ldots - -a_1 x_n(t) + h_{i-n+m}u(t)$$

Εξισώσεις κατάστασης

$$x(t) = A_{0b}x(t) + b_{0b}u(t)$$

$$y(t) = c_{0b}x(t)$$

Όπου

$$A_{0b} = A_{c0}^T$$

$$b_{0b} = c_{c0}^T$$

$$c_{0b} = b_{c0}^T$$

Στις δύο παρατηρήσιμες μορφές, η έξοδος του συστήματος εισέρχεται σε κάθε ολοκληρωτή είτε απευθείας, είτε μετά από ορισμένες ολοκληρώσεις, χωρίς άλλους γραμμικούς συνδυασμούς. Έτσι οι μεταβλητές καταστάσεως (δηλ. οι έξοδοι των ολοκληρωτών) "παρατηρούνται" μονοσήμαντα με βάση την έξοδο

Σύνοψη περιγραφής Κανονικών Μορφών (1)

Κανονική παρατηρήσιμη μορφή

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o u(t)$$
$$y(t) = C_o x(t)$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n-m-1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m+1} \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Κανονική ελέγξιμη μορφή

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$
$$y(t) = C_c x(t)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{n-m-1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$A_o = A_c^T \qquad B_o = C_c^T \qquad C_o = B_c^T$$

Σύνοψη περιγραφής Κανονικών Μορφών (2)

Κανονική μορφή Ελεγξιμότητας

$$\dot{x}(t) = A_{co}x(t) + B_{co}u(t)$$
$$y(t) = C_{co}x(t)$$

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B_{co} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{co} = [\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-m-1} \ h_0 \ h_1 \ \cdots \ h_m]$$

όπου

$$[h_0 \ h_1 \ \ldots \ h_m] = [b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_{m+1}] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ 0 & 1 & a_1 & \ldots & a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Κανονική μορφή Παρατηρησιμότητας

$$\dot{x}(t) = A_{ob}x(t) + B_{ob}u(t)$$
$$y(t) = C_{ob}x(t)$$

όπου

$$A_{ob} = A_{co}^T \quad B_{ob} = C_{co}^T \quad C_{ob} = B_{co}^T$$

Δυαδικότητα Κανονικών μορφών

Ελέγξιμη - Παρατηρήσιμη

$$A_0 = A_c^T \qquad c_0 = b_c^T$$
$$b_0 = c_c^T$$

Ελέγξιμότητας - Παρατηρήσιμότητας

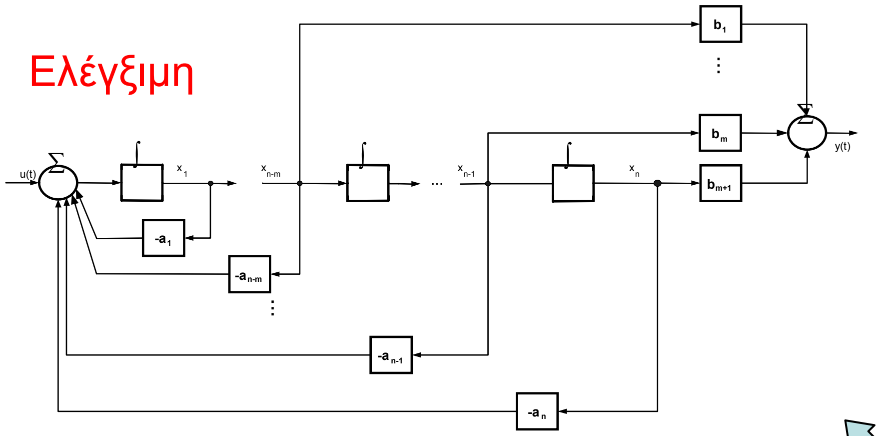
$$A_{0b} = A_{c0}^T \qquad c_{0b} = b_{c0}^T$$
$$b_{0b} = c_{c0}^T$$

Δυαδικότητα Κανονικών μορφών

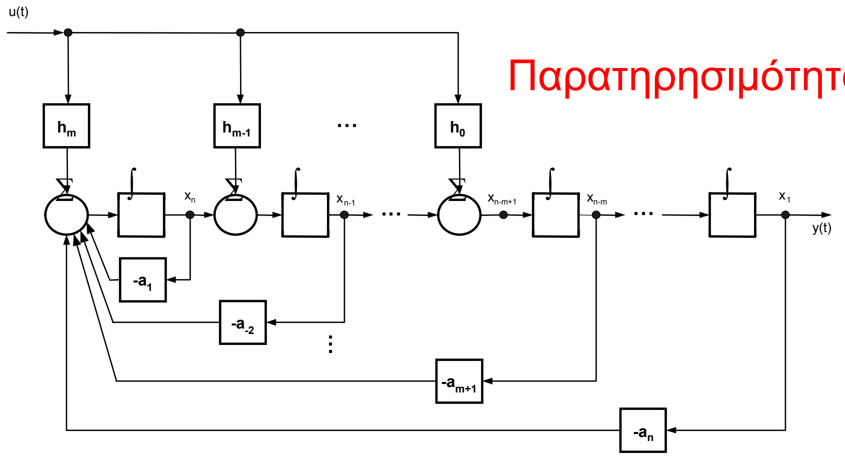
$S_1.S_2$

$S_2.S_1$

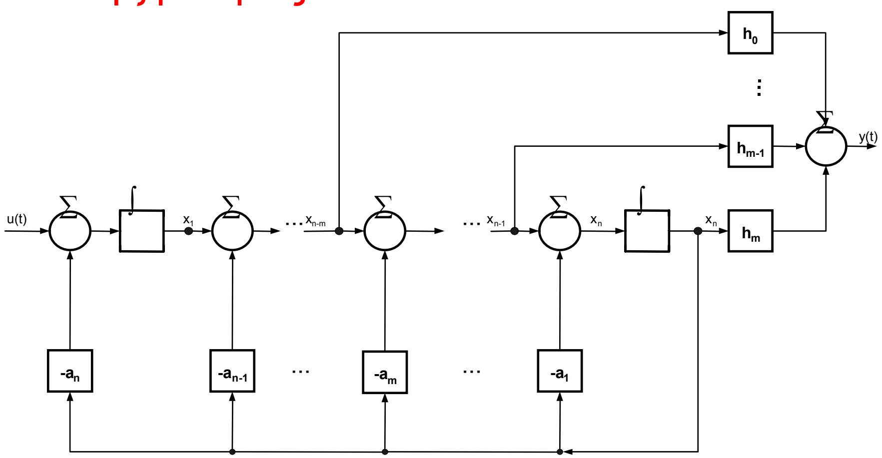
Ελέγξιμη



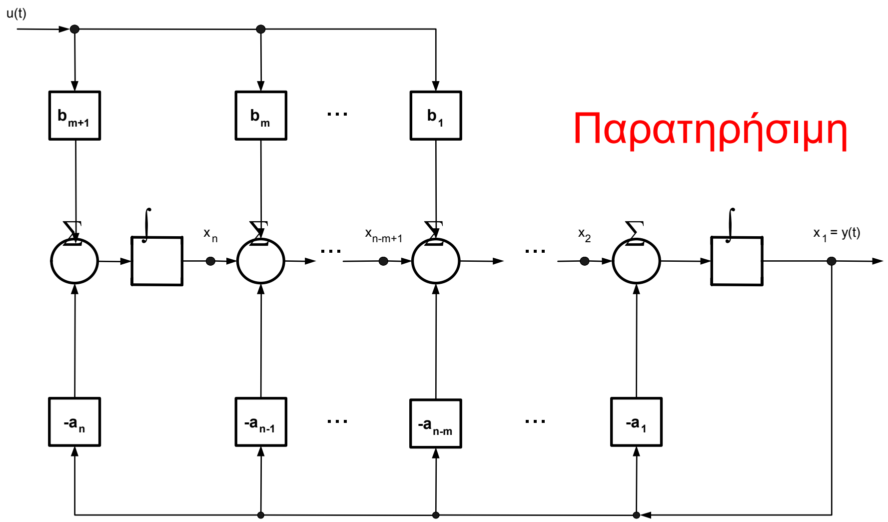
Παρατηρησιμότητας



Ελεγξιμότητας



Παρατηρήσιμη



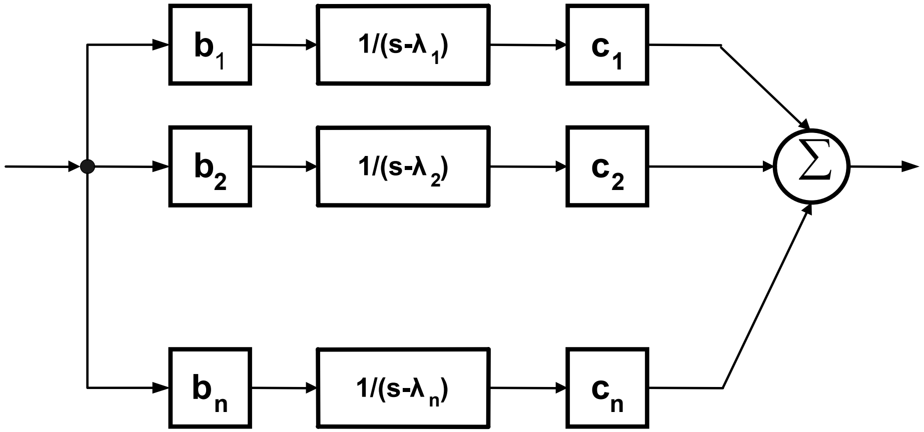
Αλλάζουμε: Φορά στα βέλη, είσοδο με έξοδο, σημεία άθροισης με σημεία άντλησης

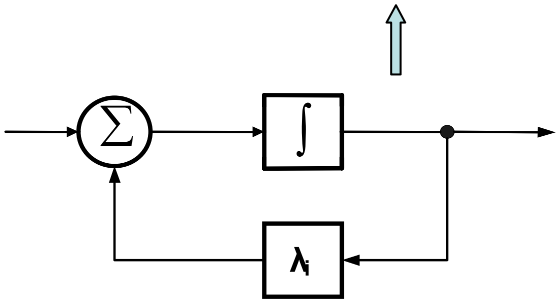
Παράλληλες Πραγματώσεις

1. Οι πόλοι του παρανομαστή είναι όλοι διακριτοί

$$H(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-\lambda_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i c_i}{s-\lambda_i}$$





Αν οι έξοδοι των ολοκληρωτών ληφθούν σαν καταστάσεις του συστήματος παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x}_i=\lambda_i x_i+b_i u$$

$$y_i=c_i x_i$$

Ή σε πινακοδιανυσματική μορφή

A = *diag*(λ_1, λ_2, …, λ_n)

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}u$$

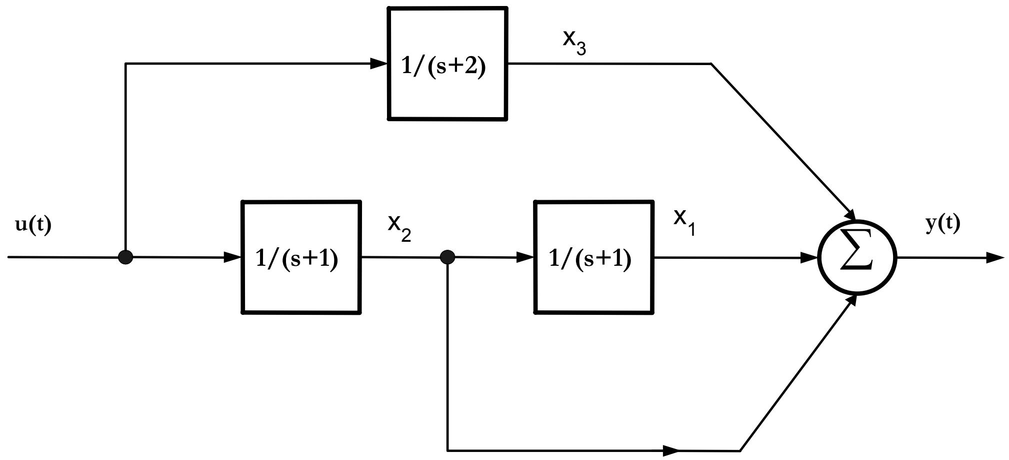
$$y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Παράλληλες Πραγματώσεις

2. Οι πόλοι του παρανομαστή δεν είναι όλοι διακριτοί

Έστω για παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s^2 + 6s + 5}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)}$$



Αν οι έξοδοι των ολοκληρωτών ληφθούν σαν καταστάσεις του συστήματος παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x}_i = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u$$
$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

Ή σε πινακοδιανυσματική μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = Jordan = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = -2$$

Από τις εξισώσεις Χ.Κ. στη συνάρτηση μεταφοράς

Έστω το σύστημα στο χ.κ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Εφαρμόζοντας μετ/μό Laplace παίρνουμε

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$
$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται ως ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Υποθέτοντας ότι το x(0) (αριστερά) είναι μηδέν, παίρνουμε

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \Rightarrow$$
$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \Rightarrow$$
$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

Και τελικά

$$Y(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D\right]U(s)$$

Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$

Θυμόμαστε ότι

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{adj[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

όπου ο Adj(X) είναι ένας πίνακας που έχει για στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του Χ

Παράδειγμα: Ο *Adj του Α είναι ο*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές του πίνακα A και πόλοι της συνάρτησης μεταφορας

Οι ιδιοτιμές ενός *nxn* πίνακα Α είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\left|\lambda \mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$$

Οι ιδιοτιμές λ_i ενός nxn πίνακα Α συνδέονται με τα *nx1* ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_i$ μέσω της σχέσης

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\lambda \mathbf{x}_i$$

Παρατηρήστε ότι στη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\mathbf{C}\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\left|s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|}\mathbf{B}+D$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή (πόλοι) είναι στην πραγματικότητα οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης δηλαδή οι ιδιοτιμές.

Στην περίπτωση λοιπόν αυτή οι ιδιοτιμές του πίνακα Α ταυτίζονται με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς.

Οι ιδιοτιμές λοιπόν του πίνακα Α του συστήματος μας δίνουν χρήσιμη πληροφορία για την ευστάθεια του συστήματος

Οι μεταβλητές κατάστασης δεν είναι μοναδικές

Ένα σύνολο μεταβλητών κατάστασης δεν είναι μοναδικό για ένα δοσμένο σύστημα. Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις που περιγράφουν τη δυναμική τους συμπεριφορά

Γι' αυτό εάν **x** είναι ένα διάνυσμα κατάστασης τότε και το **z** όπου **z=Px** είναι επίσης ένα διάνυσμα κατάστασης του συστήματος εφόσον ο P είναι **ομαλός** (δηλαδή η |P| είναι μη μηδενική και ο αντίστροφος του P υπάρχει)

Στην περίπτωση των Γ.Χ.Α συστημάτων έχουμε ότι

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Επειδή $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{aligned}}$$

Μετασχηματισμός ομοιότητας

Και οι δύο παραστάσεις στο χώρο κατάστασης είναι έγκυρες και αντιστοιχούν στο ίδιο σύστημα και την ίδια συνάρτηση μεταφοράς Ονομάζονται όμοιες παραστάσεις

Ανεξαρτησία Ιδιοτιμών

Οι ιδιοτιμές ενός συστήματος είναι **αναλλοίωτες** από τους γραμμικούς μετασχηματισμούς ομοιότητας

Αυτό σημαίνει ότι σε δύο παραστάσεις του ίδιου συστήματος στο χ.κ, οι οποίες συνδέονται με γραμμικό μετασχηματισμό ομοιότητας, οι ιδιοτιμές του εκάστοτε πίνακα A παραμένουν οι ίδιες

Αυτό είναι αναμενόμενο αφού και οι δύο παραστάσεις αντιπροσωπεύουν το ίδιο σύστημα με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς και τις ίδιες ιδιότητες ευστάθειας

Απόδειξη:

Οι πίνακες δύο όμοιων συστημάτων στο χ.κ συνδέονται με τη σχέση

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Για να έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές θα πρέπει να ισχύει $\det(\lambda\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{PAP}^{-1}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$

Πράγματι,εφόσον η ορίζουσα ενός γινομένου είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών, ισχύει

$$\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right| = \left|\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\right| = \left|\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}\right| = \left|\mathbf{P}^{-1}\right|\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right|\left|\mathbf{P}\right| = \left|\mathbf{P}^{-1}\right|\left|\mathbf{P}\right|\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| =$$

$$\left|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right|\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| = \left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}\right|$$