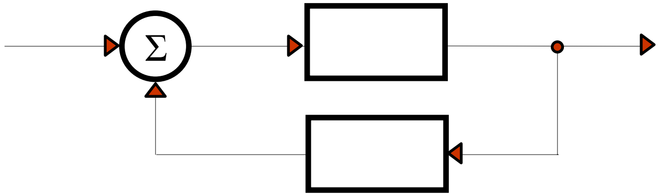


ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Συστήματα αυτομάτου ελέγχου (II)

Modern Control Theory

(1η Ενότητα: Συστήματα Συνεχούς Χρόνου)

Επίλυση εξισώσεων κατάστασης

Διδάσκων : **Ι. Μπούταλης**
Αναπληρωτής Καθηγητής

Επίλυση των εξισώσεων κατάστασης

Έστω το Γ.Χ.Α σύστημα που περιγράφεται από την (πινακοδιαφορική) εξίσωση κατάστασης $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$

Η επίλυση της πινακοδιαφορικής αυτής εξίσωσης δίνει την τιμή της κατάστασης **x**(t) σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t>=t_0$ και κατά συνέπεια την τιμή της εξόδου **y**(t) μέσω της εξίσωσης $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$

Η επίλυση της πινακοδιαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Όταν ο αρχικός χρόνος είναι ο t=0

Ή από τον τύπο

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-to)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{to}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Όταν ο αρχικός χρόνος είναι ο $t=t_0$

Ο πίνακας $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ ονομάζεται εκθετικός πίνακας ή πίνακας μετάβασης κατάστασης. Μια άλλη ονομασία του είναι επιλυτικός πίνακας (γιατί είναι χρήσιμος στην επίλυση της εξ. Κατάστασης). Δίνεται από την ακόλουθη ανάπτυξη σε σειρά απείρων όρων

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \ldots)$$

Ή μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \ldots = e^{\mathbf{A}t}$$

Οι τεχνικές επίλυσης των εξ. κατάστασης στοχεύουν στον υπολογισμό του $e^{\mathbf{A}t}$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Α. Με τη βοήθεια υπολογιστή (για κάθε χρονική στιγμή t)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \ldots)$$

Για κάθε χρονική στιγμή t υπολογίζω τους διαδοχικούς όρους της σειράς μέχρι και τον όρο που δεν επηρεάζει αισθητά το αποτέλεσμα

Μπορεί κανείς να γράψει ένα απλό πρόγραμμα γι' αυτό τον σκοπό, ή να χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση ***expm*** του Matlab. Π.χ. για τον πίνακα Α

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
>> a=[0 1; -2 -3];
>> t=0;
>> expm(a*t)
ans =
     1     0
     0     1

>> t= 0.1;
>> expm(a*t)
ans =
    0.9909    0.0861
   -0.1722    0.7326
```

```
>> t= 2;
>> expm(a*t)

ans =

    0.2524    0.1170
   -0.2340   -0.0987
```

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

B. Με τον αλγόριθμο Leverier (αναλυτική λύση)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{\Phi}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$

Υπολογίζω τον πίνακα $\Phi(S) = (SI-A)^{-1} = \dfrac{S^{n-1}F_1 + S^{n-2}F_2 + \ldots + SF_{n-1} + F_n}{S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}S + \alpha_n} = \dfrac{\operatorname{adj}(SI-A)}{\det(SI-A)}$

Από τις επαναληπτικές σχέσεις

$F_1=I$ $\quad\alpha_1= -$ίχνος(AF_1)
$F_2=AF_1+ \alpha_1 I$ $\quad\alpha_2= -(1/2)$ίχνος (AF_2)
:
$F_n= AF_{n-1}+ \alpha_{n-1}I$ $\quad\alpha_n= -(1/n)$ίχνος (AF_n)
και τελική συνθήκη
$F_{n+1}= AF_n+ \alpha_n I = 0$ για έλεγχο σφάλματος

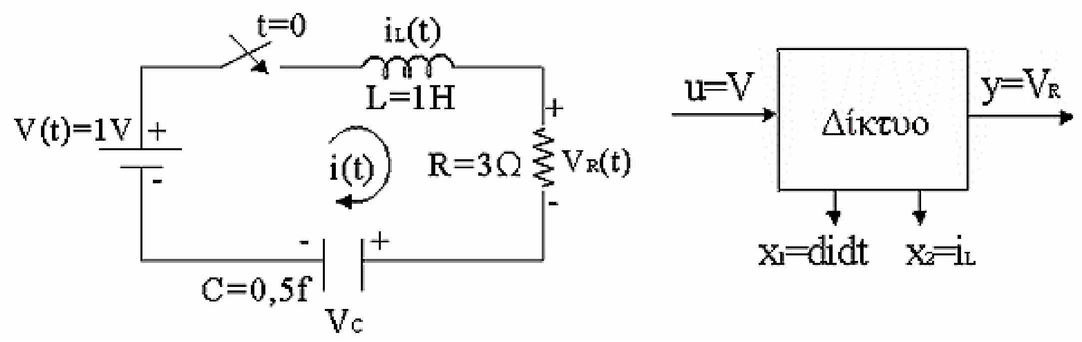
όπου ίχνος $(A) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετ. Laplace του πίνακα **Φ**(s) υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετ. Laplace κάθε στοιχείου του

Κάθε στοιχείο του πίνακα **Φ**(s) είναι ρητή παράσταση πολυωνιμικών όρων, η οποία θα πρέπει πρώτα να αναλυθεί σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

Ένα παράδειγμα

Έστω το σύστημα



$$i = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int idt$$

<u>Νόμος τάσεων</u>

$$\frac{di}{dt} + 3i + 2\int_0^t idt = V(t)$$

ορίζονται : $x_1(t) = \int_0^b i(t)dt,\ \ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = i_L(t) = i(t)$

με $x(0)=x_0=[0,1]$ και $u(t)=V(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

Με τη μέθοδο Leverier έχουμε

$$\Phi(S) = (SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}\Phi(S) = \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \Phi(t)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t} - e^{-2t}\\ -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα ...

πράγματι $\det(SI\text{-}A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s(s+3)+2 = s^2+3s+2$

$$s_{12} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad < \begin{matrix} s_1=-1 \\ s_2=-2 \end{matrix}$$

Άρα χαρακτηριστικό πολυώνυμο **$P(S)=S^2+3S+2=(S+1)(S+2)$** κατά συνέπεια (leverier).

$$\Phi(S) = (SI - A)^{-1} = \frac{SF_1 + F_2}{s^2+3s+2}$$ όπου **$F_1=I$** α_1= -ίχνος(AF_1)= -ίχνος(A)= 3

$$F_2 = AF_1 + \alpha_1 I = A + 3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$ και $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ ίχνος (AF_2)

μπορούμε ακολούθως να υπολογίσουμε το F_3 και να επαληθεύσουμε τη σχέση

$F_3 = A F_2 + \alpha_2 I = 0$

Ένα παράδειγμα ...

Ακολούθως αναλύουμε το: $\Phi(S)=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{S-\lambda_i}\Phi_i \quad \lambda_{i,\ i=1,2}=-1,-2$

$\Phi_i=\lim_{S\to\lambda i}(S-\lambda_i)\Phi(S)$ Δεδομένου ότι $\Phi(S)=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$

$$\Phi_1=\lim_{S\to -1}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+2} & \frac{s}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Phi_2=\lim_{S\to -2}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{-2}{s+1} & \frac{s}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

Άρα $\Phi(S)=\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$

Το ίδιο προκύπτει φυσικά αν κάνουμε μερική ανάλυση σε κλάσματα του κάθε όρου του πίνακα **Φ(S)** ξεχωριστά

$$\Phi(t)=L^{-1}\{\Phi(S)\}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα ...

Η λύση της ομογενούς είναι

$$\Phi(t) = L^{-1}\Phi(S) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

και γενική λύση

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda$$

όπου $\int_0^t \Phi(t-\lambda)bu(\lambda)d\lambda = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\lambda)} - e^{-2(t-\lambda)} \\ -e^{-(t-\lambda)} + 2e^{-2(t-\lambda)} \end{bmatrix} u(\lambda)d\lambda =$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}d\lambda \text{-} e^{-2t}\int_0^t e^{2\lambda}d\lambda \\ -e^{-t}\int_0^t e^{\lambda}d\lambda + 2e^{-2t}\int_0^t e^{2\lambda}d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

και $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Γ. Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (αναλυτική λύση)

βασίζεται στην διαγωνοποίηση του πίνακα A (ή στον μετασχηματισμό του σε μορφή Jordan) και στις ιδιότητες των συναρτήσεων των πινάκων για τις οποίες ισχύουν:

Αν οι πίνακες A ,B συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού ομοιότητας **$B=MAM^{-1}$** και ισοδύναμα **$A=M^{-1}BM$** **τότε** **$f(A)=M^{-1}f(B)M$** και **$f(B)= M\,f(A)\,M^{-1}$**

Επίσης ισχύει ότι αν ο $A_{\text{block διαγώνιος}}=\{A_1, A_2,\dots, A_n\} \Rightarrow f(A) =\{f(A_1), f(A_2),\dots, f(A_n)\}$

Στην περίπτωση που ο A είναι διαγώνιος = A_d = diag($\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$), η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$e^{A_d t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Από τις σχέσεις ομοιότητας προκύπτει ότι

$$A = MA_dM^{-1} \Rightarrow$$
$$e^{At} = Me^{A_d t}M^{-1}$$

Οι στήλες του πίνακα M είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A

Για να βρούμε εύκολα τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα μπορούμε να χρξσιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **eig** του Natlab. Αλλιώς, με το χέρι …

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Για τον υποπίνακα όμως Jordan ισχύει:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \text{(nxn)} \qquad f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & & \frac{f^{n-1}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

οι παραγωγήσεις είναι ως προς λi

κατά συνέπεια η $e^{J_i t}$ γίνεται:

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{\lambda_i t} \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Έστω

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \vdots & \lambda_4 & 1 & \vdots & & \\ & & & \vdots & 0 & \lambda_4 & \vdots & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ & \underline{0} & & & & & \vdots & \lambda_6 & \\ & & & & & & \vdots & & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & & \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & \underline{0} & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & \vdots & e^{\lambda_4 t} & te^{\lambda_4 t} & \vdots & & \\ & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_4 t} & \vdots & & \\ & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ & \underline{0} & & & & & \vdots & e^{\lambda_6 t} & 0 \\ & & & & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_7 t} \end{bmatrix}$$

τότε:
$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ όπου e^{Jt} ο διπλανός πίνακας και S ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.

Ένα παράδειγμα

<u>3η μέθοδος</u> (Μέθοδος ιδιοτιμών)

Στο παράδειγμα της δεύτερης μεθόδου: ακολουθώντας την 3η μέθοδο, έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Και οι δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ είναι διακριτές

Βρίσκουμε την $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_{11} + x_{12} = 0 \Rightarrow x_{11} = -x_{12}$. Έστω $x_{12} = 1$ τότε $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ομοίως: $Ax_2 = \lambda_2 x_2 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_{22} + 2x_{21} = 0 \Rightarrow x_{22} = -2x_{21} \Rightarrow$ αν $x_{21} = 1$ και $x_{22} = -2$

τοτε $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Σχηματίζουμε τον πίνακα $M = [\, x_1 \mid x_2 \,] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ένα παράδειγμα ...(μέθοδος ιδιοτιμών)

$$M = [\, x_1 \,|\, x_2 \,] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Πιστοποιούμε ότι detM=1$\neq$ 0

$$\text{και} \;\; M^{-1} = \frac{\text{AdjM}}{\text{detM}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$e^{At} = Me^{A_d t}M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

4η μέθοδος (Μέθοδος Cayley-Hamilton)

Το θεώρημα Cayley-Hamilton λέει ότι ο πίνακας A ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή αν $S^n+\alpha_1 S^{n-1}+\ldots+\alpha_n=0$ η χαρακτηριστική εξίσωση του A τότε:

$$A^n+\alpha_1 A^{n-1}+\ldots+\alpha_n I=0.$$

Τούτο σημαίνει ότι κάθε πίνακας A^κ με $\kappa\geq n$ μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει πολυωνύμων πινάκων που περιέχουν δυνάμεις του A έως και n-1 τάξης.

Κατά συνέπεια:

$$\exp(At)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{t^\kappa}{\kappa=0}A^\kappa=\sum_{i=0}^{n-1}C_i(t)A^i$$

όπου $C_i(t)$, $i=0,1,\ldots,n-1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις του χρόνου.

Επειδή οι πίνακες A και J συνδέονται με τον μετασχηματισμό ομοιότητας $A=SJS^{-1}$

Αυτοί έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και επομένως στις συναρτήσεις $\exp(At)$, $\exp(Jt)$ τα ίδια $C_i(t)$, δηλαδή:

$$\exp(Jt)=\sum_{i=0}^{n-1}C_i(t)J^i$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Έχουμε ήδη αναφέρει τη μορφή που έχει ο exp(Jt). Για την μορφή του J^k δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε το $f(J)= J^k$ ακολουθώντας τη μορφή που έχει ο $f(J)$.

Έχουμε: $$J^{\kappa} = \begin{bmatrix} \lambda^{\kappa} & \frac{\kappa\lambda^{\kappa-1}}{1!} & \frac{\kappa(\kappa-1)\lambda^{\kappa-2}}{2!} & \cdots \\ 0 & \lambda^{\kappa} & & \\ & & \ddots & \frac{\kappa\lambda^{\kappa-1}}{1!} \\ & & & \lambda^{\kappa} \end{bmatrix} (nxn)$$

Έχοντας τις μορφές του J^i με $J^0=I$ και του exp(Jt) λύνουμε το σύστημα με την εξίσωση για τον υπολογισμό του $C_i(t)$.

Έχουμε: $-\alpha_n I= A^n +\alpha_1 A^{n-1}+\ldots+ \alpha_{n-1}A \Rightarrow$

$\Rightarrow -\alpha_n A^{-1}= A^{n-1} +\alpha_1 A^{n-2}+\ldots+ \alpha_{n-1}I \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_n}[A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} I]$$

(υπολογισμός) του A^{-1} (μπορεί να υλοποιηθεί σε Η/Υ)

Ομοίως: $A^n = -[\alpha_1 A^{n-1}+\ldots+ \alpha_{n-1}A+ \alpha_n I] \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{n+1} = -[\alpha_1 A^n+\alpha_2 A^{n-1}+\ldots+ \alpha_n A] =$

$= -(\alpha_1(\alpha_1 A^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}A+\alpha_n I)+ \alpha_2 A^{n-1}+\ldots+ \alpha_n A)$ κ.λ.π.

$\forall$ $\kappa>n$ A^{κ} υπολογίζεται συναρτήσει δυνάμεων του A^i όπου $i=0\ldots n-1$.

Ένα παράδειγμα ...

Παράδειγμα: (4η μέθοδος) Να υπολογισθεί ο e^{AT} όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Ο πίνακας Α είναι ήδη σε μορφή Jordan.
Αν δεν ήταν θα ακολουθούσαμε την παρακάτω ανάλυση για να βρούμε τη μορφή Jordan.)

Ο πίνακας Α έχει την διπλή ιδιοτιμή λ=+1. Άρα n=2, m=2.

$$B = (A - \lambda I) = (A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p(B) = 1$

$v_1 = n - p = 1$

Άρα υπάρχει ένας μόνο υποπίνακας J που συνδέεται με την $\lambda = 1$ και είναι διάστασης 2.

Το ίδιο (δηλαδή η διάστασή του) πιστοποιείται και από το ότι:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$p = 0 = \text{n-m}$ άρα εδώ σταματάμε

$v_2 = n - p = 2$

και v_2-v_1=1 άρα εδώ υπάρχει ιδιοδιάνυσμα που ανήκει στο N_2 αλλά όχι στο N_1.
Από αυτό γεννιέται αλυσίδα μήκους 2.

Επίσης v_1-v_0=1-0=1. Άρα υπάρχει N_1 το οποίο όμως έχει ήδη προσδιορισθεί από το προηγούμενο βήμα.

Επομένως: $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ένα παράδειγμα ... μέθοδος Cayley Hamilton

Άρα ο e^{At} έχει ίδια C_i με τον e^{Jt} και $e^{Jt} = C_0 I + C_1 J$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 + C_1 & C_1 \\ 0 & C_0 + C_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} e^t = C_0 + C_1 \\ te^t = C_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = te^t \\ C_0 = e^t - te^t \end{matrix}$$

κατά συνέπεια:

$$e^{At} = C_0 I + C_1 A = \begin{bmatrix} e^t - te^t & 0 \\ 0 & e^t - te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^t & te^t \\ 0 & te^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Τρόποι εύρεσης του e^{At}

Στην περίπτωση που ο A έχει διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε $J=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και έχουμε:

$$\exp(\lambda_\kappa t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t)\lambda_\kappa^{\,i} \quad \kappa = 1,2,\dots,n$$

οι παραπάνω n εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των $C_i(t)$ και μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} C_0(t) \\ C_1(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}(t) \end{bmatrix} = V^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \text{όπου } V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{\,n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{\,n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{\,n-1} \end{bmatrix}$$

πίνακας Van de Moore

Έστω τώρα το **<u>παράδειγμα</u>** της **<u>μεθόδου1</u>** Έχουμε: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ και $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

Οπότε: $V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ και $V^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Οπότε: $\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_0 = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ C_1 = e^{-t} - e^{-2t} \end{matrix}$

Οπότε: $\exp(At) = C_0 I + C_1 A = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$