Ορισμοί (Σημείο ισορροπίας - Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Έστω ότι στη γενική περίπτωση το σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης με το μαθηματικό πρότυπο:

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

όπου x είναι ένα nδιάστατο διάνυσμα κατάστασης και το f(x, t) είναι ένα nδιάστατο διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις των x_1, $x_2,\ldots,x_n$ και του t_0.Τη λύση της (1) συμβολίζουμε με $\Phi(t,x,t_0)$ όπου $\Phi(t, x_0,t_0) = x_0$.

Ορισμός 1:

Το *διάνυσμα x_e* καλείται κατάσταση ισορροπίας(equilibrium state) του συστήματος αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x_e, t) = 0 \text{ για όλα τα } t \qquad (2)$$

ο ορισμός είναι ισοδύναμος με την ιδιότητα

$$x(t_0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e \ \ \forall \ \ t \geq t_0$$

Ορισμοί (Σημείο ισορροπίας - Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Για τον προσδιορισμό των καταστάσεων ισορροπίας δεν χρειάζεται να λυθεί η δυναμική εξίσωση (1) αλλά η αλγεβρική εξίσωση (2). Έτσι *όταν π.χ. το σύστημα είναι Γ.Χ.Α.* $f(x, t) = Ax$ τότε υπάρχει μια μόνο κατάσταση ισορροπίας όταν $|A| \neq 0$ (και άπειρες καταστάσεις ισορροπίας όταν $|A| = 0$). *Όταν το σύστημα (1) είναι μη γραμμικό* τότε μπορούν να υπάρχουν μια ή και περισσότερες καταστάσεις ισορροπίας.

Αναφέρεται ότι κάθε μια κατάσταση ισορροπίας x_e μπορεί με τη χρήση μετασχηματισμών να μετατοπισθεί στην αρχή των αξόνων, οπότε η νέα κατάσταση ισορροπίας θα ικανοποιεί τη σχέση: $f(0,t) = 0 \quad \forall\, t$

Ορισμός 2: (Κατά Lyapunov ευστάθεια γύρω από το σημείο ισορροπίας)

Η κατάσταση ισορροπίας x_e του συστήματος (1) είναι ευσταθής αν για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ τέτοιος ώστε

αν $\| x_0 - x_e \| \leq \delta$ τότε $\| \Phi(t, x_0, t_0) - x_e \| \leq \varepsilon$ για όλα τα $t \geq t_0$

όπου $\| \; \|$ η ευκλείδια μετρική.

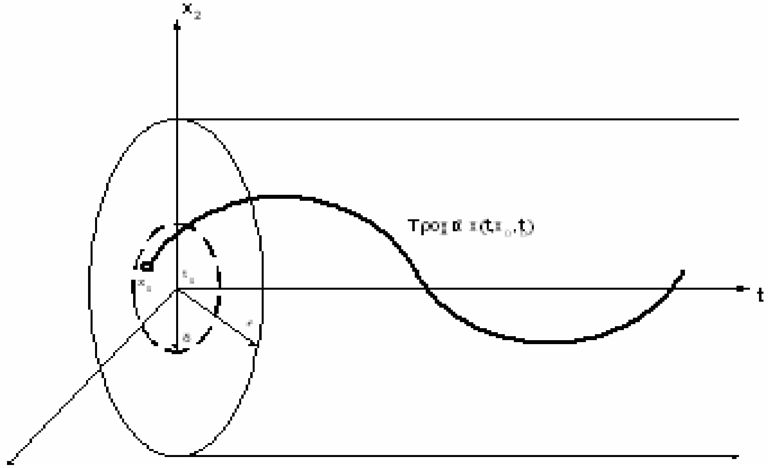
Αν το δ δεν εξαρτάται από το t_0 τότε η x_e είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

Ορισμοί (Σημείο ισορροπίας - Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Ο *Ορισμός 2* μας λεει ότι αν $S(\delta)$ η περιοχή που αποτελείται από όλα τα σημεία ώστε $|x_0 - x_e| \leq \delta$ και $S(\varepsilon)$ η περιοχή που απαρτίζεται από όλα τα σημεία ώστε: $||\Phi(t;x_0,t_0) - x_e|| \leq \varepsilon$

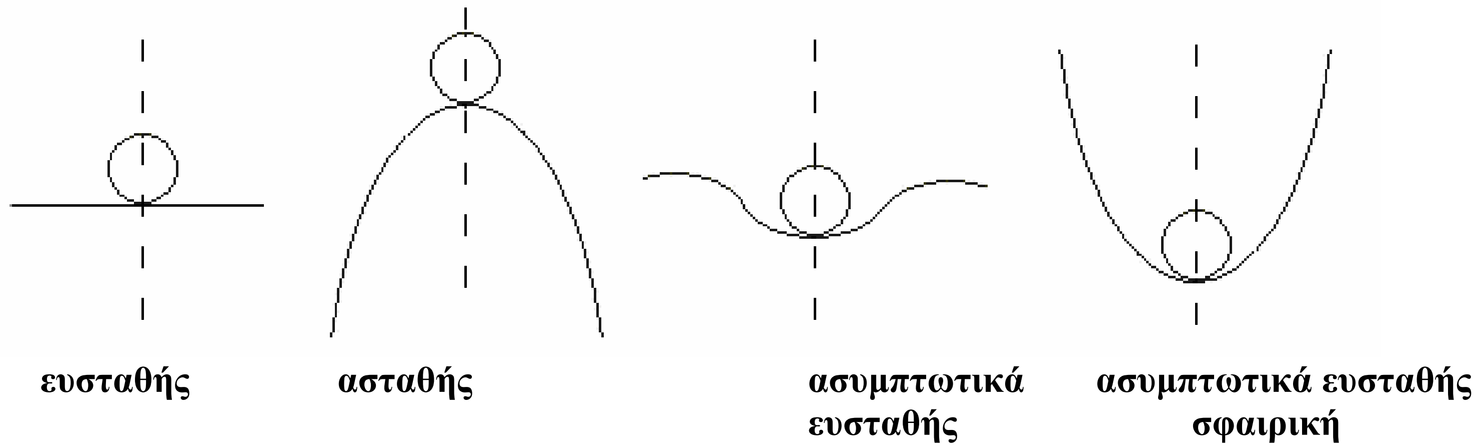
Τότε η κατάσταση ισορροπίας x_e λέγεται ευσταθής κατά Lyapunov αν σε κάθε $S(\varepsilon)$ υπάρχει μια $S(\delta)$ τέτοια ώστε οι τροχιές (όλων των σημείων $x=\Phi(t;x_0\ t_0)$ που ξεκινούν από το $S(\delta)$ δεν αφήνουν την $S(\varepsilon)$ καθώς το t αυξάνει απεριόριστα.

Με άλλα λόγια πρώτα διαλέγουμε μια περιοχή S(ε)και για κάθε S(ε) πρέπει να υπάρχει μια περιοχή S(δ) τέτοια ώστε οι τροχιές που ξεκινούν από την S(δ) δεν αφήνουν την S(ε) καθώς το t αυξάνει.



Ορισμοί (Σημείο ισορροπίας - Ευστάθεια κατά Lyapunov)

- Ασυμπτωτική ευστάθεια: Μια *κατάσταση ισορροπίας* του συστήματος (1) λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθής αν είναι ευσταθής κατά Lyapunov και αν κάθε λύση που ξεκινά μέσα στη S(δ) συγκλίνει στην x_e χωρίς να αφήνει την S(ε).
- Αν η ασυμπτωτική ευστάθεια δεν περιορίζεται στην περιοχή του μηδενός του χώρου κατάστασης αλλά ισχύει για οποιαδήποτε κατάσταση εκκίνησης x_o τότε η κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται **σφαιρική ασυμπτωτική ευστάθεια** (προφανώς αναγκαία συνθήκη είναι εδώ να υπάρχει μία μόνο κατάσταση ισορροπίας).



Ορισμοί (Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Δεύτερη Μέθοδος Lyapunov

Γνωρίζουμε από τη μηχανική ότι ένα δονούμενο σύστημα είναι ευσταθές αν η ολική του ενέργεια (μια θετικά ορισμένη συνάρτηση) μειώνεται διαρκώς (που σημαίνει ότι η χρονική παράγωγος της ολικής ενέργειας πρέπει να είναι αρνητικά ορισμένη) μέχρις ότου φθάσει την ελάχιστη τιμή της στην κατάσταση ισορροπίας.

> *Η δεύτερη μέθοδος Lyapunov βασίζεται σε γενίκευση αυτού του γεγονότος. Αν το σύστημα έχει μια ασυμπτωτικά ευσταθή κατάσταση ισορροπίας, τότε η αποθηκευμένη ενέργεια του συστήματος που μετατοπίζεται μέσα στην περιοχή της έλξης μειώνεται καθώς ο χρόνος αυξάνεται.*

Για καθαρά μαθηματικά συστήματα όμως δεν υπάρχει απλός τρόπος ορισμού μιας "συνάρτησης ενέργειας". Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία ο Lyapunov εισήγαγε τη συνάρτηση Lyapunov, μια φανταστική "συνάρτηση ενέργειας".

Η ιδέα είναι όμως πιο γενική από αυτήν της ενέργειας και πιο ευρέως εφαρμοσμένη. Στην πραγματικότητα *οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση* που ικανοποιεί τις υποθέσεις των θεωρημάτων ευστάθειας του Lyapunov μπορεί να είναι μια συνάρτηση Lyapunov.
Οι συναρτήσεις Lyapunov εξαρτώνται από τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ και το t και συμβολίζονται με V(x,t).
Αν οι συναρτήσεις δεν περιέχουν ρητά το t τότε τις συμβολίζουμε με V(x).

Παράγωγος (Πεπλεγμένης συνάρτησης)

Δεδομένο

Αν $f(t) = f(u(t),v(t))$ τότε $f'(t) = f'_u(u,v)\dot{u}(t) + f'_v(u,v)\dot{v}(t)$

Περίπτωση 1: Η συνάρτηση είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση του n-διάστατου διανύσματος x, (u(t)= x(t) και v(t)=t)

Τότε

$$V'(x,t) = V'_x\,\dot{x} + V'_t\,\dot{t} = V'_x\,\dot{x} + \dot{V}$$
$$= [\mathrm{grad}_x]V\dot{x} + \dot{V}$$

όπου $V'_x = \mathrm{grad}_x V = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} V$

Περίπτωση 2: Η συνάρτηση είναι μια χρονικά αμετάβλητη συνάρτηση του n-διάστατου διανύσματος x, (u(t)= x(t) και v(t)=0)

Τότε $V'(x(t)) = V'_x\,\dot{x}$

Ορισμοί (Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Στη δεύτερη μέθοδο του Lyapunov η συμπεριφορά προσήμου της V(x,t) και της χρονικής της παραγώγου $\dot{V}(x,t) = dV(x,t)/dt$ μας δίνει πληροφορία για την ευστάθεια μιας κατάστασης ισορροπίας χωρίς να απαιτείται η εύρεση της λύσης του συστήματος. (Αυτό ισχύει και για γραμμικό και για μη γραμμικό σύστημα).

Θεώρημα 1 (Lyapunov)

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την δυναμική εξίσωση $\dot{x} = f(x,t)$ όπου $f(0,t)=0\ \forall t$ (δηλαδή η x=0 είναι κατάσταση ισορροπίας), τότε αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση V(x,t) που έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους και που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. η V(x,t) είναι θετικά ορισμένη
2. η $\dot{V}(x,t)$ είναι αρνητικά ορισμένη

τότε η κατάσταση ισορροπίας x=0 είναι ομοιόμορφα ασυμτπωτικά ευσταθής. Αν καθώς επιπρόσθετα $V(x,t) \rightarrow \infty$ $\|x\| \rightarrow \infty$ τότε η κατάσταση ισορροπίας στην αρχή x=0 είναι ασυμπτώτικά ευσταθής σφαιρικά.

Ορισμοί (Ευστάθεια κατά Lyapunov)

Το Θεώρημα 1 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν μπορεί να προσδιορισθεί μια χρονικά αμετάβλητη ή χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και το σύστημα λέγεται ευσταθές κατά την έννοια του Lyapunov.

Η χρονικά αμετάβλητη συνάρτηση $V(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες για όλα τα $t>t_0$ και για όλα τα x στην περίπτωση του $x=0$ όπου το $x=0$ είναι σημείο ισορροπίας.

1. η $V(x)$ και οι μερικές της παράγωγοι ορίζονται και είναι συνεχείς
2. $V(0)=0$
3. $V(x)>0$ για όλα τα $x\neq 0$
4. $\dot{V}(x)<0$ για όλα τα $x\neq 0$ όπου η $\dot{V}(x)$ είναι η ολική παράγωγος της $V(x)$ δηλαδή είναι $\dot{V}(x)=[\mathrm{grad}_x V]^T \dot{x}$

Η χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση $V(x,t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες για όλα τα $t\geq t_0$ και για όλα τα x στην περιοχή του $x=0$ όταν το $x=0$ είναι σημείο ισορροπίας.

1. Η $V(x,t)$ και οι μερικές τις παράγωγοι ως προς x και ως προς t ορίζονται και είναι συνεχείς.
2. Η $V(0,t)=0$.
3. Η $V(x,t)\geq \alpha(\|x\|)>0$ για όλα τα $x\neq 0$ και $t\geq t_0$ όταν $\alpha(0)=0$ και $\alpha(\mu)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση του μ.
4. Η $\dot{V}(x,t)<0$ για όλα τα $x\neq 0$ όπου η $\dot{V}(x,t)$ δίνεται από τη σχέση $\dot{V}(x,t)=[\mathrm{grad}V]\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial t}$.

Παράδειγμα

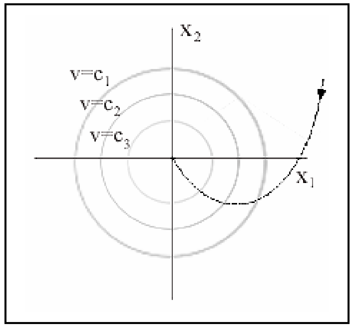
- Έστω το μη γραμμικό σύστημα $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_1 - x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$ Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με πιθανή συνάρτηση Lyapunov την $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

Λύση Πρέπει να ελέγξουμε αν η πιθανή συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού. Το σημείο x=0 είναι σημείο ισορροπίας γιατί f(0)=0 ∀t. Αν τις ικανοποιεί τότε το σύστημα είναι ευσταθές στο σημείο ισορροπίας x_e=0. Αν δεν τις ικανοποιεί, τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε κανένα συμπέρασμα για την ευστάθεια του συστήματος και θα πρέπει να αναζητήσουμε άλλες πιθανές συναρτήσεις Lyapunov.

Οι τρεις πρώτες συνθήκες προφανώς ικανοποιούνται, για την τέταρτη συνθήκη έχουμε:

$$\dot{V}(x) = [\mathrm{grad}_x V]^T \dot{x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \cdot \dot{x} = 2[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = 2[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_2 - x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_1 - x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$= -2(x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$



Άρα $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$. Επομένως η V(x) είναι συνάρτηση Lyapunov και κατά συνέπεια το σύστημα είναι ευσταθές στο σημείο ισορροπίας x_e=0.
Βλέπουμε ότι η V(x) είναι η απόσταση του διανύσματος κατάστασης $x(t)=[x_1(t), x_2(t)]^T$ από την αρχή των αξόνων στο σημείο (x_1,x_2). Αν η απόσταση αυτή μικραίνει καθώς *το* t μεγαλώνει (δηλαδή $\dot{V}(x) < 0$) *τότε* $x(t) \to 0$.

Αστάθεια (κατά Lyapunov)

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την $\dot{x} = f(x,t)$ όπου $f(0,t)=0 \ \forall \ t \geq t_0$ (δηλαδή x=0 κατάσταση ισορροπίας).

Η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής αν υπάρχει συνάρτηση W(x,t) που ικανοποιεί τις

1. W(x,t) είναι θετικά ορισμένη στην γειτονική περιοχή του x=0.
2. $\dot{W}(x,t)$ είναι θετικά ορισμένη στην ίδια περιοχή.

Επειδή τα θεωρήματα ευστάθειας της δεύτερης μεθόδου απαιτούν οι V(x) να είναι πάντα θετικά ορισμένες, συχνά (αλλά όχι πάντα) διαλέγουμε τη V(x) να είναι τετραγωνικής ή ερμιτιανής μορφής.

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστημάτων

Έστω το σύστημα $\dot{x} = Ax$

- Υποθέτουμε ότι ο A είναι ομαλός. Τότε η μόνη κατάσταση ισορροπίας είναι η x=0. *Για να μελετήσουμε την ευστάθεια αυτής της κατάστασης ισορροπίας διαλέγουμε σαν πιθανή συνάρτηση Lyaponuv την $V(x)=x^T Px$ όπου P είναι ένας θετικά ορισμένος πραγματικός συμμετρικός πίνακας*.
- Η χρονική παράγωγος της V(x) κατά μήκος κάθε τροχιάς δίνεται από την

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax)^T Px + x^T PAx =$$
$$= x^T A^T Px + x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x$$

- Επειδή η V(x) διαλέχτηκε να είναι θετικά ορισμένη απαιτούμε για ασυμπτωτική ευστάθεια ότι $\dot{V}(x) = -x^T Qx$ όπου ο $Q = -(A^T P + PA)$ είναι θετικά ορισμένος. Κατά συνέπεια αρκεί ο πίνακας Q να είναι θετικά ορισμένος.

Ευστάθεια ΓχΑ Συστημάτων

Αντί όμως να καθορίσουμε πρώτα ένα θετικά ορισμένο πίνακα P και να εξετάσουμε αν ο Q είναι θετικά ορισμένος είναι πιο βολικό να καθορίσουμε ένα θετικό ορισμένο πίνακα Q και ακολούθως να εξετάσουμε αν ο P που καθορίζεται από τον τύπο

$$A^T P + PA = -Q$$

είναι θετικά ορισμένος. Ας σημειωθεί ότι ο P απαιτείται να είναι θετικά ορισμένος.

Έτσι προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Έστω το ΓχΑ σύστημα $\dot{x} = Ax$ Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η κατάσταση ισορροπίας να είναι ασυμπτωτικά σφαιρικά ευσταθής είναι ότι με δεδομένο ένα θετικά ορισμένο πραγματικό-συμμετρικό πίνακα Q (ή ερμητιανό πίνακα) να υπάρχει θετικά ορισμένος πραγματικός-συμμετρικός (ή ερμητιανός) πίνακας P τέτοιος ώστε

$$A^T P + PA = -Q.$$

Η βαθμωτή συνάρτηση $x^T P x$ είναι η συνάρτηση Lyaponuv γι' αυτό το σύστημα.

Ευστάθεια ΓχΜ Συστημάτων

Για Γ.χ.Μ συστήματα που περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

η αντίστοιχη εξίσωση προσδιορισμού του P(t) τώρα είναι η:

$$\dot{P}(t) + A^{T}(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$$

που είναι μια *πινακοδιαφορική εξίσωση* (της μορφής Ricatti)

Μέθοδος Gradient (Εύρεση συνάρτησης Lyapunov)

Για την περίπτωση των μη γραμμικών συστημάτων έχουν προταθεί διάφοροι μέθοδοι προσδιορισμού μιας συνάρτησης Lyaponuv. Μία από τις επικρατέστερες είναι η μέθοδος των Schultz και Gibson ή μέθοδος Gradient.

> *Η μέθοδος βασίζεται στην ιδέα ότι αν υπάρχει μία συνάρτηση Lyaponuv που να αποδεικνύει ότι κάποιο σύστημα είναι ασυμπτωτικα ευσταθές τότε υπάρχει και ένα μοναδικό grad της συνάρτησης αυτής.*

Έστω ότι V(x) είναι μια πιθανή συνάρτηση Lyaponuv. Τότε θα είναι:

$$\dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} \qquad \text{όπου} \nabla = \mathrm{grad}_x \qquad \text{και} \quad \nabla V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Αν μας είναι γνωστή η συνάρτηση ∇V, τότε η V υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$V = \int_0^x (\nabla V)^T dx = \int_0^{x_1,(x_2 = \ldots = x_n = 0)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\right] dx_1 +$$

$$+ \int_0^{x_2,(x_1 = x_1, x_3 = \ldots = x_n = 0)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_2}\right] dx_2 \qquad (1)$$

για να είναι όμως η βαθμωτή συνάρτηση V μοναδική, δηλαδή ανεξάρτητη από το δρόμο ολοκλήρωσης της V, θα πρέπει $\nabla x \nabla V = 0$

Μέθοδος Gradient (Εύρεση συνάρτησης Lyapunov)

όπου ∇x σημαίνει την πράξη Curl που για την περίπτωση π.χ των τριών διαστάσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες x_1,x_2,x_3 ορίζεται ως εξής:

$$\nabla x A = \left[\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right] i_1 + \left[\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right] i_2 + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right] i_3$$

όπου $A=A_1 i_1+A_2 i_2+ A_3 i_3$ και i_1,i_2,i_3 είναι μοναδιαία διανύσματα προς την κατεύθυνση των αξόνων x_1,x_2,x_3 αντίστοιχα. Αν $A=\nabla V$ τότε

$$\nabla x \nabla V = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3}\right] i_1 + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1}\right] i_2 + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right] i_3$$

για να ισχύει $Vx\nabla V=0$ θα πρέπει

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (2)$$

ή στην γενική περίπτωση αν εκφράσουμε την παραπάνω συνθήκη σε μορφή πίνακα θα πρέπει ο πίνακας Β να είναι συμμετρικός

Μέθοδος Gradient (Εύρεση συνάρτησης Lyapunov)

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 v}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

Αυτό συνεπάγεται $\frac{n(n-1)}{n}$ συνθήκες της μορφής (2)

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό μίας V που να ικανοποιεί την $V x \nabla V=0$ και φυσικά να ικανοποιεί τον ορισμό κατά Lyaponuv.

Τα κύρια βήματα υπολογισμού μιας συνάρτησης Lyaponuv με τη μέθοδο gradient είναι τα εξής:

1. Θεωρούμε ότι
   $\nabla V=G(x,t)x$ όπου G αυθαίρετος πίνακας. Συνήθως θεωρούμε ότι ο πίνακας G είναι σταθερός.
2. Υπολογίζουμε την V και την περιορίζουμε να είναι αρνητικά ορισμένη ή τουλάχιστον αρνητικά ημιορισμένη.
3. Περιορίζουμε την V έτσι ώστε ο πίνακας B να είναι συμμετρικός.
4. Ελέγχουμε αν μετά την εφαρμογή του βήματος 3 η V συνεχίζει να ικανοποιεί το βήμα 2.
5. Υπολογίζουμε την V σύμφωνα με τη σχέση (1).
6. Εξετάζουμε αν η V ικανοποιεί τον ορισμό Lyaponuv.