Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

1.Ορισμοί και Χρήσιμες Ιδιότητες

(Π1) $\lambda(A)$ είναι το διάνυσμα ιδιοτιμών του πίνακα A

(Π2) $|\,\mathrm{x}\,| = \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)}$

(Π3) Η «ιδιότητα του τριγώνου»: για οποιαδήποτε διανύσματα x, y ισχύει ότι

$$x^T y \leq \frac{1}{2}|\,x\,|^2 + \frac{1}{2}|\,y\,|^2$$

(Π4) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται θετικά ορισμένος (συμβολικά A>0) όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$A > 0 \Leftrightarrow x^T A x > 0, \forall x \neq 0$$

(Π5) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται θετικά ημι-ορισμένος (συμβολικά A≥0) όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη

$$A \geq 0 \Leftrightarrow x^T A x \geq 0, \forall x \neq 0$$

(Π6) Ιδιότητες Θετικά Ορισμένων και Ημι-Ορισμένων Πινάκων:

(Π6.1) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και θετικές.

(Π6.2) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} > 0$.

(Π6.3) Αν ο A είναι θετικά ημι-ορισμένος, τότε όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και μη-αρνητικές.

(Π6.4) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος ή ημι-ορισμένος ισχύει ότι $\lambda_{\min}(A)|\,x\,|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)|\,x\,|^2, \forall x$, όπου $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ είναι η ελάχιστη και η μέγιστη αντίστοιχα ιδιοτιμή του πίνακα A **[Τι πρόσημο έχουν οι ιδιοτιμές $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ και γιατί;]**.

(Π6.5) Αν ο A είναι θετικά ορισμένος τότε

$$\lambda(-A) = -\lambda(A)$$

(Π7) Για δυό πίνακες A, B έχουμε ότι $(AB)^T = B^T A^T$.

2.Ευστάθεια και Ευρωστία Ελεγκτών

Θεώρημα Lyapunov

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = f(x, w), x \in \Re^n, w \in \Re^m$$

όπου x, w είναι το διάνυσμα κατάστασης και εξωγενών διαταραχών, αντίστοιχα. Το διάνυσμα εξωγενών διαταραχών μπορεί να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο αλλά πεπερασμένο, δηλαδή

$$w_{\max} = \max_t |w(t)| < \infty .$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση (συνάρτηση Lyapunov) $V(x), V : \Re^n \to \Re$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $V(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0, V(0) > 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $V(x) \to \infty \Leftrightarrow |x| \to \infty$
3. $\dot{V}(x) = \dfrac{\partial V^T(x)}{\partial x} f(x, w) < 0, \forall x \notin \aleph, \forall w$, όπου το $\aleph$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\Re^n$ το οποίο εμπεριέχει το σημείο $x = 0$.

Τότε, ισχύει ότι για κάθε αρχική τιμή $x(0)$, το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ θα εισέλθει στο υποσύνολο $\aleph$ και θα παραμείνει εκεί για πάντα.

Ευρωστία Ελεγκτών σε Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – Βαθμωτό Σύστημα

Έστω το βαθμωτό σύστημα

$$\dot{x} = (a + \Delta a)x + (b + \Delta b)u + w \tag{1}$$

όπου όλες οι ποσότητες στην παραπάνω εξίσωση είναι ΒΑΘΜΩΤΑ μεγέθη. Οι παράμετροι a, b αντιστοιχούν στις <u>ονομαστικές</u> (γνωστές) παραμέτρους του συστήματος, οι παράμετροι $\Delta a, \Delta b$ αντιστοιχούν στις (άγνωστες αλλά σταθερές) <u>παραμετρικές αβεβαιότητες</u> του συστήματος, ενώ το (άγνωστο και χρονικά μεταβαλλόμενο) μέγεθος w αντιστοιχεί στις <u>εξωγενείς διαταραχές</u>. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν σχεδιασθεί ένας ελεγκτής για το «ονομαστικό» σύστημα

$$\dot{x} = ax + bu$$

κατά πόσο αυτός ο ελεγκτής θα είναι αποτελεσματικός για το «πραγματικό» σύστημα (1). Έστω λοιπόν ο ελεγκτής

$$u = -Kx$$

ο οποίος, για να είναι αποτελεσματικός για το «ονομαστικό» σύστημα, θα πρέπει το κέρδος του K να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση [**γιατί;**]

$$(a - bK) < 0$$

Η ανάλυση της αποτελεσματικότητας του παραπάνω ελεγκτή για το πραγματικό σύστημα θα γίνει μέσω της παρακάτω συνάρτησης Lyapunov **[γιατί η παρακάτω συνάρτηση είναι συνάρτηση Lyapunov;]**

$$V = \frac{1}{2}x^2$$

Έχουμε ότι

$$\dot{V} = \left(a + \Delta a - bK - \Delta bK\right)x^2 + wx$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας (Π3), έχουμε ότι

$$\dot{V} \le \left(a + \Delta a - bK - \Delta bK\right)x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}w^2 = \left(a + \Delta a + \frac{1}{2} - bK - \Delta bK\right)x^2 + \frac{1}{2}w^2$$

$$\le \Phi x^2 + \frac{1}{2}w_{\max}^2$$

όπου $\Phi = \left(a + \Delta a + \frac{1}{2} - bK - \Delta bK\right)$. Για να ισχύει το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov, θα πρέπει $\Phi < 0$. Σε αυτήν την περίπτωση (δηλαδή αν $\Phi < 0$) έχουμε ότι (σύμφωνα με το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov) η κατάσταση x θα εισέλθει – και θα παραμείνει για πάντα – στο σύνολο $\aleph = \left\{x : |x| \le \frac{w_{\max}}{\sqrt{-2\Phi}}\right\}$. **[γιατί;]**

Ευρωστία Ελεγκτών σε Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα – Πολυδιάστατο Σύστημα

Τώρα εξετάζουμε την επέκταση των παραπάνω σε μη-βαθμωτά συστήματα. Παρόμοια με την παράγραφο 1.3.1 υποθέτουμε ότι το <u>πραγματικό σύστημα</u> είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + w, x \in \Re^n, u \in \Re^m, w \in \Re^n \tag{2}$$

Όπως και στην παράγραφο 1.3.1, οι πίνακες A, B αντιστοιχούν στις <u>ονομαστικές</u> (γνωστές) παραμέτρους του συστήματος, οι πίνακες $\Delta A, \Delta B$ αντιστοιχούν στις (άγνωστες αλλά σταθερές) <u>παραμετρικές αβεβαιότητες</u> του συστήματος, ενώ το (άγνωστο και χρονικά μεταβαλλόμενο) διάνυσμα w αντιστοιχεί στις <u>εξωγενείς διαταραχές</u>.

Το ερώτημα που τίθεται και εδώ είναι αν σχεδιασθεί ένας ελεγκτής για το «ονομαστικό» σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

κατά πόσο αυτός ο ελεγκτής θα είναι αποτελεσματικός για το «πραγματικό» σύστημα (2). Έστω λοιπόν ο ελεγκτής

$$u = -Kx$$

ο οποίος, για να είναι αποτελεσματικός για το «ονομαστικό» σύστημα, θα πρέπει ο πίνακας κέρδους να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση [**γιατί;**]

$$(A - BK)^T P + (A - BK)P = -Q$$

για κάποιους θετικά ορισμένους πίνακες P και Q. Συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι ότι αν ορίσουμε σαν συνάρτηση Lyapunov την συνάρτηση **[γιατί η παρακάτω συνάρτηση είναι συνάρτηση Lyapunov;]**

$$V = x^T P x$$

τότε (για την περίπτωση του ονομαστικού συστήματος) έχουμε ότι **[γιατί;]**

$$\dot{V} = -x^T Q x$$

Τώρα, για την περίπτωση του πραγματικού συστήματος έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \big((A+\Delta A)x-(B+\Delta B)Kx+w\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A)x-(B+\Delta B)Kx+w\big)\\
&= \big((A+\Delta A)x-(B+\Delta B)Kx\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A)x-(B+\Delta B)Kx\big)+w^T Px + x^T Pw\\
&= \big((A+\Delta A-BK-\Delta BK)x\big)^T Px + x^T P\big((A+\Delta A-BK-\Delta BK)x\big)+w^T Px + x^T Pw\\
&= x^T\left\{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)^T P + P(A+\Delta A-BK-\Delta BK)\right\}x + w^T Px + x^T Pw\\
&= x^T\left\{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)^T P + P(A+\Delta A-BK-\Delta BK)\right\}x + w^T Px + x^T Pw \qquad (\Pi 7)\\
&\le x^T\left\{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)^T P + P(A+\Delta A-BK-\Delta BK)\right\}x + |w|^2 + |P|^2|x|^2 \qquad (\Pi 3)\\
&\le x^T\left\{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)^T P + P(A+\Delta A-BK-\Delta BK) + |P|^2\ I\right\}x + |w|^2\\
&= x^T\Phi x + |w|^2
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\Phi = \left\{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)^T P + P(A+\Delta A-BK-\Delta BK) + |P|^2\ I\right\}
$$

Για να ισχύει το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov, θα πρέπει $\Phi < 0$ (δηλαδή ο πίνακας $-\Phi$ θα πρέπει να είναι θετικά ορισμένος). Σε αυτήν την περίπτωση (δηλαδή αν $\Phi < 0$) έχουμε ότι (σύμφωνα με το Εύρωστο Θεώρημα Lyapunov) η κατάσταση x θα εισέλθει – και θα παραμείνει για πάντα – στο σύνολο $\aleph = \left\{ x : |x| \le \dfrac{w_{\max}}{\sqrt{-\lambda_{\min}(\Phi)}} \right\}$. **[γιατί;]**

3.Γραμμικός Τετραγωνικός Έλεγχος (ΓΤΕ)

Για το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Ο έλεγχος που ελαχιστοποιεί το κριτήριο

$$J = \int_0^\infty (x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s))ds$$

όπου Q, R είναι θετικά ορισμένοι πίνακες, δίνεται από τη σχέση

$$u = Kx, K = R^{-1}B^T P$$

όπου ο πίνακας P είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας, που υπολογίζεται ως η λύση της παρακάτω αλγεβρικής εξίσωσης Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί κάνοντας χρήση της συνάρτησης care της matlab.

4.Παρατηρητής

Θεωρείστε το Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΑΧ) σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \Re^n, u \in \Re^m$$

$$y = Cx, y \in \Re^k$$

Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω σύστημα, το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι διαθέσιμο. Ένας παρατηρητής για το παραπάνω σύστημα είναι ο παρακάτω:

$$\dot{\hat{x}} = (A + L^T C)\hat{x} + Bu + Ly$$

$$L = -\Phi^{-1}CX$$

$$\Psi = -XA - A^T X + XC^T \Phi^{-1} CX$$

όπου οι πίνακες Φ και Ψ είναι θετικά ορισμένοι πίνακες σχεδιασμού.

Η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης (αλγεβρική εξίσωση Riccati) μπορεί να επιλυθεί κάνοντας χρήση της συνάρτησης care της matlab.

Στην περίπτωση που το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι διαθέσιμο, ο ελεγκτής θα πάρει τη μορφή

$$u = -R^{-1}B^T P\hat{x}$$

(E)

όπου όλες οι ποσότητες έχουν ορισθεί παραπάνω.

5. Ανάλυση Ευστάθειας και Ευρωστίας ΓΤΕ και Παρατηρητή

Για την ανάλυση ευστάθειας και ευρωστίας ελεγκτή που σχεδιάστηκε βάσει της θεωρίας ΓΤΕ, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Lyapunov $V = x^T P x$. Για την ανάλυση ευστάθειας και ευρωστίας παρατηρητή που σχεδιάστηκε βάσει της θεωρίας ΓΤΕ, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Lyapunov $W = (x - \hat{x})^T X (x - \hat{x})$. Και στις δύο περιπτώσεις, για την ανάλυση **θα χρειασθεί ότι οι πίνακες $\boldsymbol{PBR^{-1}B^T P}$ και $\boldsymbol{XB^T \Phi^{-1} CX}$ είναι θετικά ημι-ορισμένοι**. Στην περίπτωση του ελεγκτή (Ε), για την ανάλυση ευστάθειας και ευρωστίας χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Lyapunov $V = x^T P x + (x - \hat{x})^T X (x - \hat{x})$.

6. Έλεγχος σε σταθερό σημείο (set point regulation)

Στην περίπτωση που επιθυμούμε ο έλεγχος αντί να οδηγήσει το διάνυσμα κατάστασης στο 0, να το οδηγήσει σε ένα σταθερό σημείο x*, μπορούμε να εφαρμόσουμε Γραμμικό Τετραγωνικό Έλεγχο με τις παρακάτω αλλαγές:

1. Ορίζουμε το νέο διάνυσμα $z = x - x^*$ και "σπάμε" τον έλεγχο ως εξής: $u = u_1 + u_2$ όπου $Bu_2 = -Ax^*$. Μπορούμε να δούμε ότι η καταστατική εξίσωση του συστήματος $\dot{x} = Ax + Bu$ μπορεί να γραφεί ως $\dot{z} = Az + Bu_1$ (αποδείξτε το!).
2. Ο Γραμμικός Τετραγωνικός Έλεγχος είναι τώρα εφαρμόσιμος για το νέο σύστημα $\dot{z} = Az + Bu_1$ (θα πρέπει το κριτήριο κόστους $J = \int_0^\infty (x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s))ds$ να αλλάξει για να είναι συνάρτηση μόνο των z, u_1.

Σχεδιασμός Ελεγκτή: Η Γενική Περίπτωση

Σχεδιάζουμε καταρχάς τον ελεγκτή, εφαρμόζοντας ΓΤΕ (βλ. κεφάλαιο 3) και θεωρώντας ότι *(Υπόθεση 1) το διάνυσμα κατάστασης x είναι διαθέσιμο (δηλαδή ότι y=x)* *(Υπόθεση 2) ο σκοπός του ελέγχου είναι να φέρουμε το διάνυσμα κατάστασης x ασυμπτωτικά στο 0.* *Ελέγχουμε την ευστάθεια και την ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου (βλ. κεφάλαιο 2 και κεφάλαιο 5). Αν η απάντηση δεν είναι ικανοποιητική, μεταβάλουμε τους πίνακες σχεδιασμού Q, R.*
Αφαιρούμε την Υπόθεση 2, κάνοντας χρήση του Κεφαλαίου 6.
Αφαιρούμε την Υπόθεση 1, κάνοντας χρήση παρατηρητή (Κεφαλαίου 5). Ελέγχουμε την ευστάθεια και την ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου (βλ. κεφάλαιο 2 και κεφάλαιο 5). Αν η απάντηση δεν είναι ικανοποιητική, μεταβάλουμε τους πίνακες σχεδιασμού Q, R, Φ και Ψ.

Άσκηση 1

Θεωρείστε το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$Y(s) = \frac{1}{a_4 s^3 + a3s^2 + a_2 s + a_0} U(s)$$

όπου οι αριθμοί α_ι αντιστοιχούν στους αντίστοιχους αριθμούς των 4 πρώτων

γραμμάτων του επιθέτου σας (π.χ. για το επίθετο Κοσματόπουλος, οι αριθμοί α_ι θα είναι $a_4 = 10, a3 = 15, a_2 = 18, a_0 = 12$).

1. Να βρείτε τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος στην μορφή

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

2. Να αναπτύξετε πηγαίο κώδικα σε matlab ο οποίος, δεδομένου ενός θετικά ορισμένου πίνακα Q, να παράγει έναν ελεγκτή $u = -Kx$ ο οποίος να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση Lyapunov

$$(A - BK)^T P + (A - BK)P = -Q$$

3. Να εξετάσετε την ευρωστία του ελεγκτή αν το πραγματικό σύστημα είναι το παρακάτω:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + w, x \in \Re^n, u \in \Re^m, w \in \Re^n$$

όπου

$$|\Delta A| < 1, |\Delta B| < 0.3, |w| < 0.3$$

και να «βελτιστοποιήστε» το ελεγκτή έτσι ώστε η κατάσταση του συστήματος να συγκλίνει σε τιμές $|x| < 0.1$

4. Να προσομοιώστε το σύστημα όταν επιδρά σε αυτό ο παραπάνω ελεγκτής.

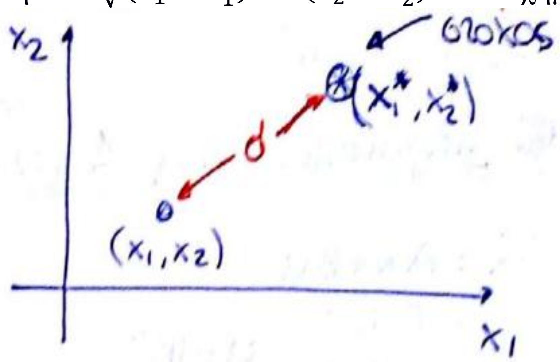
5. Υποθέστε ότι στο παραπάνω σύστημα, μόνο η 1η από τις καταστάσεις είναι διαθέσιμη για μέτρηση. Να σχεδιάστε ένα παρατηρητή για το σύστημα και να προσομοιώστε το σύστημα όταν επιδρά σε αυτό ο συνδυασμένος παρατηρητής/ελεγκτής.

Άσκηση 2:Σχεδιασμός Ελεγκτή για Προσέγγιση Στόχου

<u>Το πρόβλημα:</u> Ένα ελεγχόμενο όχημα που βρίσκεται στο σημείο $x = (x_1, x_2)$, επιθυμούμε να πάει στη θέση του στόχου $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Οι δυναμικές εξισώσεις του οχήματος είναι οι εξής:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{O}$$

Σε αντίθεση όμως με άλλα κλασικά προβλήματα αυτόματου ελέγχου, το πρόβλημα εδώ είναι ότι δεν είναι γνωστή η θέση του στόχου. Αυτό που είναι γνωστό σε κάθε χρονική στιγμή είναι η απόσταση $d = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2}$ του οχήματος από τον στόχο



Άρα η εφαρμογή κλασσικών μεθόδων αυτόματου ελέγχου δεν είναι δυνατή, καθώς η έξοδος του συστήματος είναι μη γραμμική συνάρτηση.

<u>Λύση</u>: Για να εφαρμόσουμε τα εργαλεία αυτόματου ελέγχου, θα πρέπει να "φέρουμε" το σύστημα στην μορφή καταστατικών εξισώσεων (state-space equations):

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi$$

(A)

$$y = Cx + w$$

όπου *ξ, w* είναι εξωγενείς παράγοντες (**προσοχή: οι όροι x,y, A, B, ... δεν είναι απαραίτητα οι ίδιοι με αυτούς των εξισώσεων του οχήματος που δίνονται από την σχέση (O)**)

Βήμα 1ο: Σαν πρώτο βήμα πάντα ξεκινάμε από την εξίσωση εξόδου του συστήματος. Διαλέγουμε σαν έξοδο την συνάρτηση (***γιατί;***)

$$y = d^2 = (x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2$$

Βήμα 2ο: Γραμματικοποιούμε την παραπάνω εξίσωση, κάνοντας χρήση της προσέγγισης κατά Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Το πρόβλημα με την προσέγγιση κατά Taylor είναι ότι πρέπει να επιλεγεί σωστά το σημείο x_0. Επιλέγουμε διαφορετικά σημεία και ελέγχουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν. Για παράδειγμα:

(Επιλογή 1) Έστω ότι x_0 =(0,0). Τότε το ανάπτυγμα Taylor γίνεται:

$$y = f(x) = (0 - x_1^*)^2 + (0 - x_2^*)^2 + (2(x_1 - x_1^*)|_{x_1=0})x_1 + (2(x_2 - x_2^*)|_{x_2=0})x_2 + \dots$$

ή, ισοδύναμα

$$y = x_1^{*2} + x_2^{*2} - 2x_1^* x_1 - 2x_2^* x_2 + w \tag{1}$$

όπου w είναι το σφάλμα προσέγγισης, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε εξωγενή παράγοντα.

(Επιλογή 2) Έστω ότι $x_0 = (x_1^*, x_2^*)$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$y = 0 + 0x_1 + 0x_2 + w \tag{2}$$

Η διαφορά των εξισώσεων (1) και (2) είναι ότι ενώ η πρώτη είναι γραμμική συνάρτηση ως προς το $x = (x_1, x_2)$, η δεύτερη είναι εντελώς ανεξάρτητη από το $x = (x_1, x_2)$. Επιλέγουμε την Επιλογή 1, για δυο λόγους:

(a) επιθυμούμε μια συνάρτηση της μορφής $y = Cx + w$. Προφανώς, αυτή η απαίτηση ικανοποιείται με τη σχέση (1), ως εξής:

$$y = [-2x_1^* \ -2x_2^*]\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] + [0]u + y_0 + w \quad \text{όπου} \quad y_0 = x_1^{*2} + x_2^{*2} \tag{3}$$

(b) Ο εξωγενής παράγοντας w είναι πολύ μικρότερος στην Επιλογή 1 από ότι στην Επιλογή 2 (**γιατί;**)

Βήμα 3ο: Το πρόβλημα με την σχέση (3) είναι ότι δεν είναι στην μορφή $y = Cx + w$ γιατί υπάρχει στη σχέση (3) και ο σταθερός όρος y_0. Προχωράμε σε μετασχηματισμό των μεταβλητών της σχέσης (3), για να απαλλαγούμε από τον σταθερό όρο:

Ορίζουμε: $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ Όπου $\begin{matrix} \bar{x}_1 = x_1 + a_1 \rightarrow x_1 = \bar{x}_1 - a_1 \\ \bar{x}_2 = x_2 + a_2 \rightarrow x_2 = \bar{x}_2 - a_2 \end{matrix}$

και συνεπώς η σχέση (3) γίνεται:

(3) $\rightarrow y = x_1^{*2} + x_2^{*2} - 2x_1^*(\bar{x}_1 - a_1) - 2x_2^*(\bar{x}_2 - a_2) + w$

ή $y = x_1^{*2} + x_2^{*2} - 2x_1^*\bar{x}_1 + 2x_1^* a_1 - 2x_2^*\bar{x}_2 + 2x_2^* a_2 + w$

Επιλέγουμε τους όρους α_1, α_2 έτσι ώστε να "φεύγει" ο σταθερός όρος:

$$\rightarrow x_1^{*2} + x_2^{*2} = -2x_1^* a_1 - 2x_2^* a_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = -\frac{1}{2}x_1^* \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}x_2^* \end{Bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_1^* \\ x_2 - \frac{1}{2}x_2^* \end{bmatrix}$$

και τελικά καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$y = [-2x_1^*, -2x_2^*]\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + w \quad \text{ή} \quad y = C\bar{x} + w$$

(4)

Βήμα 4ο: Η εξίσωση εξόδου (4) έχει την μορφή που επιθυμούμε, αλλά με μεταβλητή κατάστασης το διάνυσμα $\bar{x}$. Θα πρέπει να βρούμε και την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση για αυτό το διάνυσμα. Παρατηρώντας ότι

$$x = \bar{x} + \bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \frac{1}{2} x_1^* \\ \bar{x}_2 + \frac{1}{2} x_2^* \end{bmatrix}$$

έχουμε

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\bar{x}} = (\dot{x} - \dot{a}) = \dot{x} = A(\bar{x} + \bar{a}) + Bu$$

$$\rightarrow \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + A\bar{a} + Bu$$

(5)

Η παραπάνω εξίσωση είναι στην μορφή που επιθυμούμε (με εξαίρεση τον σταθερό όρο $A\bar{\alpha}$, το οποίο μπορούμε να εξαλείψουμε όχι με μετασχημό μεταβλητών όπως στην περίπτωση της εξίσωσης εξόδου, αλλά με κατάλληλη επιλογή σήματος ελέγχου):

Βήμα 5ο: Είμαστε έτοιμοι να σχεδιάσουμε τον ελεγκτή του προβλήματος για το σύστημα (4), (5) κάνοντας χρήση της παρακάτω διαδικασίας:

Υπο-βήμα 5.α: Υποθέτουμε ότι

(Υπόθεση 1) το διάνυσμα κατάστασης $\bar{x}$ είναι διαθέσιμο (δηλαδή υποθέτουμε ότι $y = \bar{x}$).

(Υπόθεση 2) ο επιθυμητός σκοπός του ελεγκτή είναι να φέρει το διάνυσμα κατάστασης στο 0.

Ορίζουμε :

$$u = u_1 + u_2$$

$$\rightarrow \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + A\bar{a} + Bu_1 + Bu_2$$

$$\rightarrow \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu_1$$

όπου το u_2 ικανοποιεί τη σχέση $A\bar{\alpha} = -Bu_2$, οπότε το παραπάνω σύστημα είναι σε μορφή που μπορεί να εφαρμοστεί κατευθείαν ο σχεδιασμός ελεγκτή με χρήση Γραμμικού-Τετραγωνικού Έλεγχου, ως εξής:

$u_1 = -k\bar{x}$

$k = R^{-1}B^T P$

$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$

(6)

Επιλέγοντας κατάλληλα τους πίνακες R,Q, μπορούμε να σχεδιάσουμε τον ελεγκτή.

Υπο-βήμα 5.β: "Αφαιρούμε" την Υπόθεση 2, δηλαδή υποθέτουμε ότι

(Υπόθεση 1) το διάνυσμα κατάστασης $\bar{x}$ είναι διαθέσιμο (δηλαδή υποθέτουμε ότι $y = \bar{x}$).

Σε αυτή την περίπτωση, ο ελεγκτής γίνεται:

$u_1 = -k(\bar{x} - \bar{x}_2^*)$

(7)

όπου ο πίνακας κέρδους k είναι αυτός του υπο-βήματος 5.α και $\bar{x}_2^*$ δηλώνει το επιθυμητό σημείο στο οποίο επιθυμούμε να βρεθεί το σύστημά μας (δηλαδή το διάνυσμα $\bar{x}_2^*$ θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε όταν $\bar{x} = \bar{x}_2^*$, τότε ο στόχος του ελεγκτή έχει επιτευθεί. Προφανώς, ο στόχος του ελεγκτή έχει επιτευχθεί όταν $x = x^*$ή, ισοδύναμα, όταν $\bar{x} = x^* - \alpha$ και άρα

$\bar{x}_2^* = [\begin{matrix} \frac{1}{2}x_1^* \\ \frac{1}{2}x_2^* \end{matrix}]$

Υπο-βήμα 5.γ: "Αφαιρούμε" και την Υπόθεση 1.

Προφανώς, η υλοποίηση του ελεγκτή (7) απαιτεί γνώση της θέσης του στόχου (παρατηρήστε ότι και τα δύο διανύσματα $\bar{x}, \bar{x}_2^*$ εξαρτώνται από την θέση του στόχου. Επειδή, όμως η θέση του στόχου δεν είναι γνωστή, απαιτείται ο σχεδιασμός ενός παρατηρητή που θα εκτιμά την άγνωστη αυτή θέση. Η μορφή αυτού του παρατηρητή είναι ως εξής:

Παρατηρητής-Εκτιμητής

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

όπου $\hat{x}$ δηλώνει την εκτίμηση του διανύσματος x το οποίο θέλουμε να εκτιμήσουμε. Στην περίπτωσή μας το διάνυσμα που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι το x* και για αυτό το λόγο. Δουλεύοντας όπως στο Βήμα 1, μπορούμε να σχεδιάσου με τον εκτιμητή για το x* ως εξής:

Θεωρούμε z=x-x* οπότε $y = d^2 = z_1{}^2 + z_2{}^2 = cz + w$ κάνοντας χρήση της προσέγγισης κατά Taylor:

$$y = f(z_0) + \frac{\partial f(z_{01})}{\partial z_1}(z_1 + z_{01}) + \frac{\partial f(z_{02})}{\partial z_2}(z_2 + z_{02}) + w \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_1} = 2z_1 \\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_2} = 2z_2 \end{array} \right\}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} z_{01} = 1 \\ z_{02} = 2 \end{bmatrix}$$

$$= f(z_0) + 2z_{01}(z_1 - z_{01}) + 2z_{02}(z_2 - z_{02}) + w$$

$$= 2 + 2(z_1 - 1) + 2(z_2 - 1) + w$$

$$= 2z_1 + 2z_2 - 2 + w$$

$$y = [2,2]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - 2 + w$$

Ή

$$y = \bar{C}z - 2 + w$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \dot{x}^* \xrightarrow[\dot{x}^*=0]{} \dot{z} = Ax + Bu$$

$$\dot{\hat{z}} = Ax + Bu + L(\hat{y} - y) \left\{ \begin{array}{l} \hat{y} = \bar{C}z - 2 + w \\ y = d^2 \end{array} \right\}$$

$$\hat{z} = x - \hat{x}^* \rightarrow \hat{x}^* = x - \hat{z}$$

Οπότε, η τελική μορφή που παίρνει ο ελεγκτής είναι ίδια με την μορφή (7), αντικαθιστώντας τα δύο διανύσματα $\bar{x}, \bar{x}_2^*$ με τις εκτιμήσεις τους (**πως;**).

- Η ευστάθεια και ευρωστία του συνολικού ελεγκτή μπορεί να αναλυθεί κάνοντας χρήση της μεθόδου Lyapunov. Ποια συνάρτηση Lyapunov πρέπει να επιλέξουμε για να ελέγξουμε την ευστάθεια και ευρωστία του ελεγκτή (7); Ποια συνάρτηση Lyapunov πρέπει να επιλέξουμε για να ελέγξουμε την ευστάθεια και ευρωστία του τελικού ελεγκτή;
- Προφανώς, η ίδια μέθοδος που παρουσιάστηκε παραπάνω μπορεί να ακολουθηθεί για οποιαδήποτε μη-γραμμική συνάρτηση εξόδου, **π.χ.** $\boldsymbol{y = \cos(x_1)\, x_2}$
- Τι θα συμβεί αν στο αρχικό σύστημα (Ο) υπάρχει εξωγενής παράγοντας ή αβεβαιότητα σε σχέση με τις παραμέτρους του;

Κώδικας matlab

Ο παρακάτω κώδικας matlab μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα για την ανάπτυξη κώδικα που επιλύει προβλήματα σχεδιασμού ελεγκτών.

```
clear all
close all

%% Basics in CS
sys=tf([1],[1,0.4,1]); % Frequency domain H(s)=1/(s^2+0.4*s+1)

ss(sys) %System overview

[A,B,C,D]=tf2ss([1],[1,0.4,1]); %transfer function to state space conversion.

[NUM,DEN]=ss2tf(A,B,C,D); %State-space to transfer function conversion.

[Z,P,~] = tf2zp([1],[1 0.4 1]); %Transfer function to zero-pole conversion

% System Response (step, imapulse), fixed time
step(sys)
impulse(sys)


%% LQR

%definition
A=[0 1 0; 0 0 1; -1.5 -1.6 -0.1];
B=[0 0 0.1]';
C=[1 0 0];
D=0;
sys1=ss(A,B,C,D);

%Find the max-real eigenvalue.
max(real(eig(A)))<0

%Define simulation time,u, start point
t = 0:0.001:50;
u=zeros(size(t));
x0 = [5.005 0 0];

%Simulate time response of LTI models to arbitrary inputs
lsim(sys1,u,t,x0);

%Q R matrices
Q=eye(size(A));
R=1;
```

```
%Compute K,L. Linear-quadratic regulator design for state space systems
[K L P]=lqr(A,B,Q,R);

%Define closed-loop system
sys2=ss(A-B*K,[0 0 0]',C,D);

%Find the max-real eigenvalue.
max(real(eig(A-K*B)))<0

%Simulate time response for closed-loop system
lsim(sys2,u,t,x0);

%% Q R matrices analysis

%fine-tuning --> Q,R matrices (HOW???)
Q=[35 55 27;55 132 64; 27 64 50];
R=3;

[K L P]=lqr(A,B,Q,R);
dt=0.1;
x =[3*rand-1.7 3*rand-1.7 3*rand-1.7]';
for i = 1:200
   x=x+dt*(A-B*K)*x;
   if abs(-K*x)>1 break; end;
end


%% sub-optimal controller

j=0;
for g=0.01:0.01:5
    if max(real(eig(A-g*B*K))) >= 0
        j=j+1;
        pos(j,1:2)=[max(real(eig(A-g*B*K))) g];
    else
        neg(round(g*100-j),1:2)=[max(real(eig(A-g*B*K))) g];
    end
end

hold on
plot(pos(:,2),pos(:,1),'r',neg(:,2),neg(:,1),'g')
plot(pos(j,2),pos(j,1),'ob');
h = legend('max_eigvalue > 0','max_eigvalue < 0',2);
set(h,'Interpreter','none')
grid on
```

```
title('Maximum eigvalue of the system with g');
xlabel('g');
ylabel('Maximum eigvalue');
hold off
```

```
 neg(1,:)
```