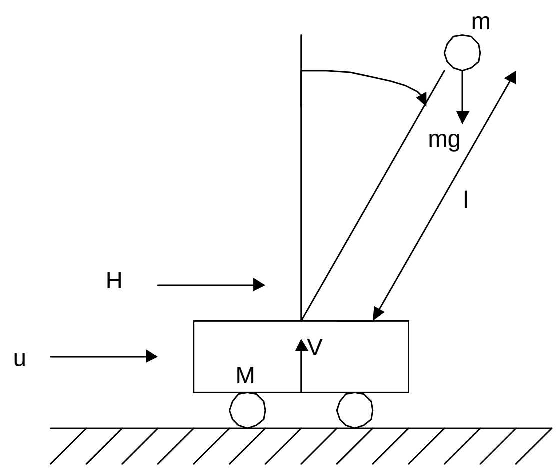
Παράδειγμα 1

Θεωρούμε ένα αμαξάκι με ένα αντιστραμμένο εκκρεμές εξαρτώμενο στο επάνω μέρος του, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Για απλότητα, το αμαξάκι και το εκκρεμές θεωρούμε ότι κινούνται μόνο σ' ένα επίπεδο και η τριβή, η μάζα της ράβδου και οι ριπές του αέρα αγνοούνται. Το πρόβλημα είναι να διατηρηθεί το εκκρεμές στην κατακόρυφη θέση του. Στο παράδειγμα αυτό δεν θα ασχοληθούμε με την εύρεση της κατάλληλης εισόδου u για την διατήρηση του εκκρεμούς στην κατακόρυφη θέση. Θα ασχοληθούμε όμως με την παραγωγή των δυναμικών του εξισώσεων στο χώρο των καταστάσεων.



Σχήμα 1 Ένα αμαξάκι με ένα ανεστραμμένο εκκρεμές.

Για παράδειγμα, αν το ανεστραμμένο εκκρεμές πέφτει στην διεύθυνση που φαίνεται, το αμαξάκι θα κινηθεί προς τα δεξιά αναπτύσσοντας μία δύναμη, διαμέσου της άρθρωσης για να σπρώξει το εκκρεμές πίσω στην κατακόρυφη θέση. Αυτός ο απλός μηχανισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μοντέλο ενός διαστημικού προωθητήρα για ανύψωση.
Έστω H και V, η οριζόντια και η κατακόρυφη, αντίστοιχα, δύναμη που ασκούνται από το αμαξάκι στο εκκρεμές και θ η γωνία που σχηματίζεται από την αβαρή ράβδο και την κατακόρυφο. Επίσης, με y συμβολίζουμε την οριζόντια μετατόπιση του αμαξιού. Η εφαρμογή του νόμου του Newton στις γραμμικές κινήσεις δίνει

$$M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=u-H$$

$$H=m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(y+l\sin\theta\right)=m\ddot{y}+ml\left(\cos\theta\right)\ddot{\theta}-ml\left(\sin\theta\right)\left(\dot{\theta}\right)^2$$

και

$$mg-V=m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(l\cos\theta\right)=ml\left[-\left(\sin\theta\right)\cdot\ddot{\theta}-\left(\cos\theta\right)\left(\dot{\theta}\right)^2\right]$$

Η εφαρμογή του νόμου του Newton στην περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς δίνει

$$ml^2\ddot{\theta}=mgl\sin\theta+Vl\sin\theta-Hl\cos\theta$$

Αυτές είναι μη γραμμικές εξισώσεις. Από την στιγμή που ο σκοπός του προβλήματος είναι να διατηρηθεί το εκκρεμές στην κατακόρυφη θέση, είναι λογικό να θεωρηθούν οι γωνίες θ και $\dot{\theta}$ μικρές. Υπό την υπόθεση αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $\sin\theta=\theta$ και $\cos\theta=1$. Διατηρώντας μόνο τους γραμμικούς όρους των θ και $\dot{\theta}$, που σημαίνει, απορρίπτοντας τους όρους $\theta^2,\dot{\theta}^2,\theta\dot{\theta}$ και $\theta\ddot{\theta}$, παίρνουμε $V=mg$ και

$$M\ddot{y}=u-m\ddot{y}-ml\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta}=mgl\theta+mgl\theta-\left(m\ddot{y}+ml\ddot{\theta}\right)l$$

από το οποίο συνεπάγεται

$$\left(M+m\right)\ddot{y}+ml\ddot{\theta}=u \qquad \textbf{(1)}$$

$$2l\ddot{\theta}-2g\theta+\ddot{y}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Για να αναπτύξουμε μία δυναμική εξίσωση, ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης ως $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$, $x_3=\theta$, και $x_4=\dot{\theta}$. Από τις (3) και (4) , μπορούμε να λύσουμε ως προς $\ddot{y}$ και $\ddot{\theta}$

$$\ddot{y}=-\frac{2gm}{2M+m}\theta+\frac{2}{2M+m}u$$

$$\ddot{\theta}=\frac{2g\left(M+m\right)}{\left(2M+m\right)l}\theta-\frac{1}{\left(2M+m\right)l}u$$

Από αυτές τις δύο εξισώσεις και τον ορισμό του x_i, η εξίσωση της περιγραφής στο χώρο κατάστασης του συστήματος μπορεί εύκολα να προκύψει ως

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{-2mg}{2M+m} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dfrac{2g\left(M+m\right)}{\left(2M+m\right)} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{2}{2M+m}\\ 0\\ \dfrac{-1}{\left(2M+m\right)}\end{bmatrix}u \qquad \textbf{(5)}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Θεωρούμε τέσσερα κινούμενα οχήματα, στο ένα επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Έστω y_i , v_i , m_i και u_i , η θέση , η ταχύτητα, η μάζα και η εφαρμοζόμενη δύναμη, αντίστοιχα του i-στού οχήματος. Έστω k ο συντελεστής κολλώδους τριβής που είναι η ίδια για όλα τα οχήματα. Τότε έχουμε, για i=1,2,3,4

$$v_i=\dot{y}_i \qquad \textbf{(6)}$$

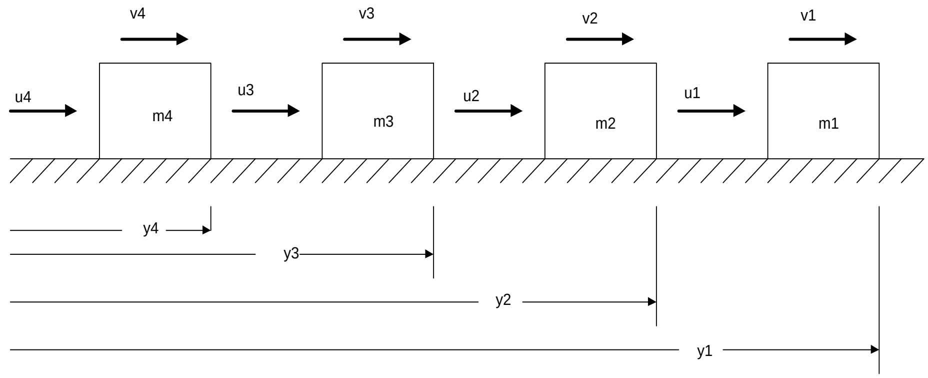
$$u_i=kv_i+m_i\dot{v}_i \qquad \textbf{(7)}$$

Ο σκοπός του προβλήματος αυτού είναι να διατηρηθεί η απόσταση μεταξύ των διπλανών οχημάτων στην προαποφασισμένη τιμή h_0 και να διατηρηθεί η ταχύτητα του κάθε οχήματος όσο το δυνατόν κοντά στην επιθυμητή ταχύτητα v_0. Ορίζουμε

$$\overline{y}_{i,i+1}(t)=y_i(t)-y_{i+1}(t)-h_0 \qquad \text{i=1,2,3} \qquad \textbf{(8)}$$

$$\overline{v_i}(t)=v_i(t)-v_0 \qquad \text{i=1,2,3,4} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\overline{u_i}=u_i(t)-kv_0 \qquad \textbf{(10)}$$



Σχήμα 2 Τέσσερα κινούμενα οχήματα στο ένα επίπεδο.

Ο όρος kv_0 είναι η δύναμη που χρειάζεται για να υπερνικηθεί η τριβή και τα οχήματα να διατηρήσουν τις ταχύτητές τους σε τιμή v_0. Τώρα το πρόβλημα ανάγεται, στην εύρεση του $\overline{u_i}(t)$ έτσι ώστε τα $\overline{y}_{i,i+1}(t)$ και $\overline{v_i}(t)$ να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στο μηδέν για κάθε χρονική στιγμή t. Από την (8), έχουμε, για i=1,2,3

$$\dot{\overline{y}}_{i,i+1}(t)=\dot{y}_i(t)-\dot{y}_{i+1}(t)=\overline{v}_i(t)-\overline{v}_{i+1}(t)$$

Από τις (7) και (9), έχουμε για i=1,2,3,4

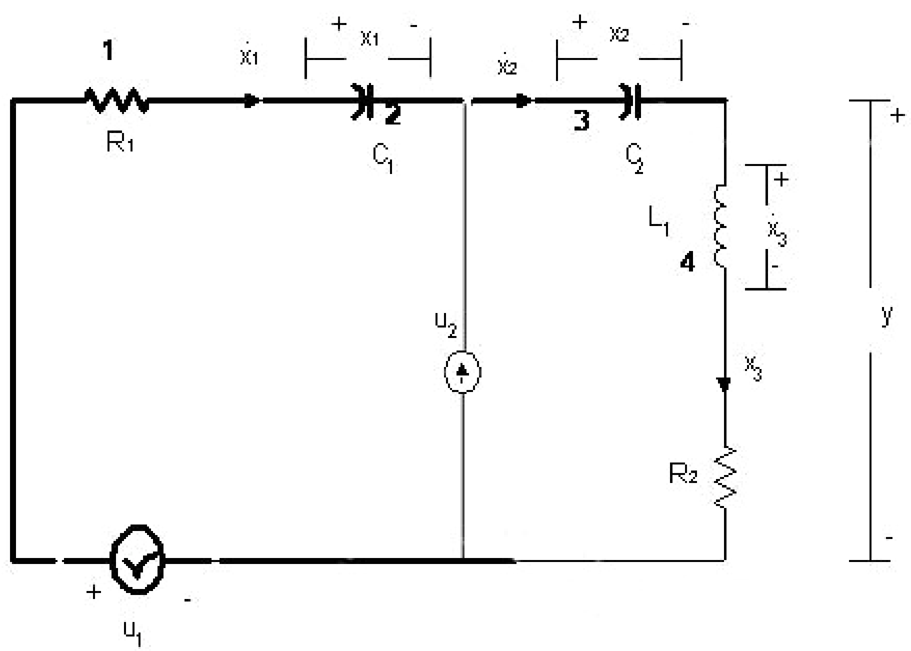
$$\dot{\overline{v}}_i(t)=\frac{-k}{m_i}v_i+\frac{1}{m_i}u_i=\frac{-k}{m_i}\overline{v}_i(t)+\frac{1}{m_i}\overline{u}_i(t)$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να τακτοποιηθούν σε έναν πίνακα ως εξής

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{v}}_1(t)\\ \dot{\overline{y}}_{12}(t)\\ \dot{\overline{v}}_2(t)\\ \dot{\overline{y}}_{23}(t)\\ \dot{\overline{v}}_3(t)\\ \dot{\overline{y}}_{34}(t)\\ \dot{\overline{v}}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-k}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-k}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{m_3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-k}{m_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{v}_1(t)\\ \overline{y}_{12}(t)\\ \overline{v}_2(t)\\ \overline{y}_{23}(t)\\ \overline{v}_3(t)\\ \overline{y}_{34}(t)\\ \overline{v}_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{u}_1(t)\\ \overline{u}_2(t)\\ \overline{u}_3(t)\\ \overline{u}_4(t)\end{bmatrix}$$

<u>**Παράδειγμα 3**</u>

Στο παράδειγμα αυτό ζητείται να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κατάστασης του παρακάτω ηλεκτρικού κυκλώματος, καθώς και ο πίνακας συνάρτηση-μεταφοράς **.** Υπάρχει μία έξοδος (y) και δύο είσοδοι, που είναι οι πηγές τάσης και ρεύματος.



Οι τάσεις των πυκνωτών και το ρεύμα του πηνίου επιλέγονται ως μεταβλητές κατάστασης**.**

Εφαρμόζοντας τον N.P.K του κλάδου έχουμε**:**

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας τον N.P.**K** του κλάδου έχουμε**:**

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + u_2 \qquad \Updownarrow \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 - u_2$$

ή

$$\dot{x}_1 = x_3 - u_2 \tag{2}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον N.T.K έχουμε**:**

$$\dot{x}_1 R_1 + x_1 + x_2 + \dot{x}_3 + x_3 R_2 - u_1 = 0$$

και λόγω της (2) έχουμε**:**

$$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - x_3\left(R_1 + R_2\right) + u_1 + u_2 R_1 \tag{3}$$

και $y = \dot{x}_3 + x_3 R_2 = u_1 - x_1 - x_2 - \dot{x}_1 R_1$ οπότε λόγω της (2) έχουμε**,**

$$y = -x_1 - x_2 - x_3 R_1 + u_1 + u_2 R_1 \tag{4}$$

Άρα η δυναμική εξίσωση που περιγράφει το παραπάνω σύστημα είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -(R_1 + R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας συνάρτηση-μεταφοράς δίνεται κατά τα γνωστά από την σχέση:

$$H(s) = \frac{1}{\det(SI - A)} C\left[Adj(SI - A)\right]B + E$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -(R_1 + R_2) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$,

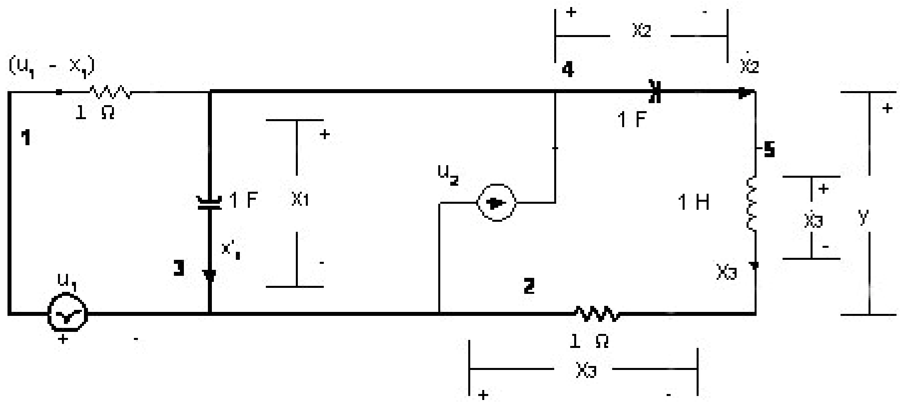
$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -R_1 \end{bmatrix}$ και $E = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \end{bmatrix}$.

Έπειτα από υπολογισμούς οι οποίοι για λόγους συντομίας παραλείπονται, καταλήγουμε στην εξής μορφή για τον πίνακα συνάρτηση-μεταφοράς:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\left(s^2 + 2sR_1 + sR_2 + 2\right) - R_1{}^2 s^2}{s\left[s^2 + s(R_1 + R_2) + 2\right]} + R_1 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Θεωρούμε το γραμμικό δίκτυο που φαίνεται στο σχήμα 3. Έχει δύο εισόδους (πηγές τάσεις και ρεύματος) και μία έξοδο y (την τάση στα άκρα του πηνίου)



Σχήμα 3

Με εφαρμογή του νόμου εντάσεων του Kirchoff έχουμε ότι το ρεύμα διαμέσου της αντίστασης του κλάδου 2 είναι x_3. Επομένως η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι x_3. Τώρα, τα χαρακτηριστικά κάθε κλάδου έχουν διατυπωθεί με εκφράσεις των μεταβλητών κατάστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εάν εφαρμόσουμε τον Ν.Ρ.**Κ** έχουμε

$$\left(u_1 - x_1\right) - \dot{x}_1 + u_2 - x_3 = 0$$

Η εφαρμογή του Ν.Ρ.**Κ** επίσης, δίνει

$$\dot{x}_2 = x_3$$

Η εφαρμογή του Ν.Τ.**Κ** στον βρόγχο που σχηματίζεται από τους κλάδους (2,3,4,5) δίνει

$$\dot{x}_3 + x_3 - x_1 + x_2 = 0$$

Αυτές οι τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν σ' ένα πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση εξόδου μπορεί εύκολα να βρεθεί ότι είναι

$$y = \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$