## Παράδειγμα 1 Μετατροπή πίνακα σε μορφή Jordan

Έστω ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα προκύπτουν από την $\det(A-\lambda I)=0$ και είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

Το ιδιοδιάνυσμα $V_3$ που αντιστοιχεί στη διακεκριμένη (μονή) ρίζα $\lambda_3 = 2$, προκύπτει από την ακόλουθη διαδικασία.

$$A-\lambda_3 I = \begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda_3 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_3 \end{bmatrix} \overset{\lambda_3=2}{\Longrightarrow} A-2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισχύει δε ότι: $AV_3 = \lambda_3 V_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A-\lambda_3 I)V_3 = 0 \overset{\lambda_3=2}{\Longrightarrow} (A-2I)V_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -V_{31}+V_{32}+2V_{33}=0 \\ -V_{32}+3V_{33}=0 \end{matrix} \quad (1) \quad \text{όπου } V_3 = \begin{bmatrix} V_{31} \\ V_{32} \\ V_{33} \end{bmatrix}$$

Έστω $V_{33}$ = αυθαίρετο = $\underline{1}$ (για ευκολία)

τότε από τις εξισώσεις (1) $\Rightarrow V_{31} = V_{32}+2V_{33}$

και $V_{32} = 3V_{33} = \underline{3}$, οπότε $V_{31} = \underline{5}$

Άρα $V_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$

Για την πολλαπλή ρίζα $\lambda_{1,2} = 1$ υπολογίζουμε τα:

$B = (A-\lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \rho(B) = 2$

$V_1 = n-\rho(B) = 3-2 = \underline{1}$

Άρα θα σχηματίσουμε ένα υποπίνακα Jordan διάστασης 2

$B^2 = (A-\lambda_1 I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \rho(B^2) = 1 = n-m$

($n$: διάσταση πίνακα = 3, $m$: πολλαπλότητα ρίζας = 2)

Επειδή $\rho(B^2) = 1 = n-m$ σταματάμε εδώ.

$V_2 = n-\rho(B^2) = 2$

Επειδή $\nu_2 - \nu_1 = 2 - 1 = 1$ υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα που ανήκει στον μηδενικό χώρο $N_2$ αλλά δεν ανήκει στον μηδενικό χώρο $N_1$. Από το ιδιοδιάνυσμα αυτό δημιουργείται μία αλυσίδα (μήκους 2) γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων.

Για το ιδιοδιάνυσμα αυτό, έστω $V$, θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (από τον ορισμό των γεν. ιδιοδιανυσμάτων)

$$B^2 V = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{w_3 = 0}$$

και

$$BV \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} w_2 + 2w_3 \neq 0 \Rightarrow w_2 \neq 0 \\ 3w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = 0 \end{matrix} \quad \text{Έστω } \boxed{w_2 = 1}$$

Υποθέτουμε επίσης αυθαίρετα $\boxed{w_1 = 0}$

Άρα ένα γεν. ιδιοδιάνυσμα $V$ είναι το

$$V = [0 \ 1 \ 0]^T$$

Το ιδιοδιάνυσμα $V$ είναι βαθμού 2 (σύμφωνα με τον ορισμό)

Έτσι $V_2 \triangleq V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ τότε $V_1 \triangleq (A - \lambda_1 I)V =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα της αλυσίδας.

Ο πίνακας Jordan προκύπτει από τον μετ/μό ομοιότητος: $J = S^{-1} A S$

όπου

$$S = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τα ιδιοδιανύσματα $V_1, V_2, V_3$ αναμένουμε (από τη θεωρία) να είναι γραμ. ανεξάρτητα. Πράγματι αυτό μπορεί να πιστοποιηθεί από το ότι ο $S$ είναι ομαλός δηλ. $\det[S] \neq 0$

Μπορούμε ακόμη να βρούμε τη μορφή Jordan χωρίς να υπολογίσουμε το γινόμενο $S^{-1}AS$

Επειδή $J = S^{-1}AS \Rightarrow AS = SJ \Rightarrow$

$$\Rightarrow A[v_1\ v_2\ v_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\, J. \quad (3)$$

Ισχύουν όμως οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_1 v_2 + v_1 \end{aligned}\right\} \text{αλυσίδα μήκους 2}$$

$$Av_3 = \lambda_3 v_3$$

(4)

υποπίνακας Jordan διάστασης 2.

$$(3),(4) \Rightarrow \quad J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & [illegible] \\ 0 & [illegible] & [illegible] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & [illegible] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [illegible] & [illegible] & 0 \\ [illegible] & [illegible] & 0 \\ [illegible] & [illegible] & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2:</u> <u>Μετατροπή πίνακα σε μορφή Jordan.</u>

Έστω $A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det C$,
όπου $A, C$ τετραγωνικοί πίνακες υπολογίζουμε:

$$\det(A-\lambda I) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1](2-\lambda)^2\,[(1-\lambda)^2-1] =$$

$$= (\lambda-2)^5 \cdot \lambda$$

$\lambda(\lambda-2)$

Άρα ο $A$ έχει την ιδιοτιμή 2 με πολλαπλότητα 5 και την ιδιοτιμή 0 με πολλαπλότητα 1.

<u>Για την πολλαπλή ιδιοτιμή:</u>

Υπολογίζουμε τα $(A-\lambda I)^i = (A-2I)^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$
μέχρις ότου $\rho(A-2I)^i = n - m = 6 - 5 = \underline{1}$
(όπου $n$ η διάσταση του $A$, $m$ η πολλαπλότητα της ρίζας)

$B = (A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\rho(A-2I) = 4$

$\nu_1 = 6 - 4 = \underline{2}$

Άρα υπάρχουν 2 υποπίνακες Jordan με άθροισμα διαστάσεων 5.

$B^2 = (A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$\rho(A-2I)^2 = 2$

$\nu_2 = 6 - 2 = 4$

$B^3 = (A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

$\rho(A-2I)^3 = \underline{1}$

Σταματάμε εδώ

$\nu_3 = 6 - 1 = 5$

- Επειδή $V_3 - V_2 = 1$ υπάρχει ένα μόνο γεν. ιδιοδιάνυσμα βαθμού 3 που ανήκει στον $N_3$ και όχι στον $N_2$ και ικανοποιεί τη σχέση $B^3 u = 0$, $B^2 u \neq 0$ ← από εδώ προκύπτει υποπίνακας Jordan διάστασης 3

Από αυτό προκύπτει η αλυσίδα μήκους 3 των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων ως εξής:

$$u_1 = B^2 u, \quad u_2 = Bu, \quad u_3 = u.$$

---

Για να υπολογισθεί ο πίνακας Jordan δεν είναι απαραίτητο να υπολογισθούν τα ιδιοδιανύσματα. Για λόγους πληρότητας όμως αναφέρεται το αποτέλεσμα των υπολογισμών:

$$u = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$$

οπότε

$$u_1 \triangleq B^2 u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 \triangleq Bu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 \triangleq u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

- Επειδή $V_2 - V_1 = 2$ υπάρχουν 2 ανεξάρτητα γεν. ιδιοδιανύσματα που ανήκουν στον $N_2$ και δεν ανήκουν στον $N_1$. Προφανώς το $u_2 = Bu$ του προηγούμενου βήματος είναι ένα από αυτά. Βρίσκουμε ακόμη ένα ιδιοδιάνυσμα $v$ τέτοιο ώστε τα $\{u_2, v\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να ισχύουν οι:

$$B^2 v = 0, \quad Bv \neq 0.$$

Από το ιδιοδιάνυσμα αυτό προκύπτει αλυσίδα μήκους 2 ως εξής. (Άρα εδώ αντιστοιχεί υποπίνακας Jordan διάστασης 2)

$$v_1 = Bv, \quad v_2 = v$$

---

Τα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2$ υπολογίζονται ότι είναι:

$$v = [0\ 0\ 1\ -1\ 1\ 1]^T$$

οπότε

$$v_1 \triangleq Bv = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 \triangleq v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος $V_1 - V_0 = 2 - 0 = 2$.

Δηλαδή υπάρχουν 2 ιδιοδιανύσματα που ανήκουν στον χώρο $N_1$. Τα ιδιοδιανύσματα αυτά έχουν ήδη υπολογισθεί από τα 2 προηγούμενα βήματα και είναι τα $u_1$ και $v_1$.

Τελικά μετά την παραπάνω ανάλυση εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας Jordan είναι

1ος υποπίνακας Jordan διάστασης 3 (3x3)

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{array}\right]$$

2ος υποπίνακας Jordan διάστασης 2 (2x2)

3ος (εκφυλισμένος) υποπίνακας Jordan διάστασης 1 (αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη ιδιοτιμή $\lambda_6 = 0$)

Άρα

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

**Παράδειγμα** Εύρεσης του $e^{At}$ με τη μέθοδο **Cayley - Hamilton**

Να ευρεθεί ο $e^{At}$ όπου ο $A$ έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow |\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \ (\text{διπλή}), \quad \lambda_3 = 1$$

Βρίσκουμε τώρα τη μορφή Jordan του πίνακα A

Για τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda=2$ υπολογίζουμε τα $(A-2I)^i$, $i=1,2,\ldots$

Έως ότου $\rho(A-2I)^i = n-m = 3-2 = 1$ ($n$ = η διάσταση του πίνακα A, $m$: η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής)

$$A-2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &\rho(A-2I) = 2 \\ &\nu_1 = 3-2 = 1 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει ένας μόνο υποπίνακας Jordan διάστασης 2

Το ίδιο συμπέρασμα αποκομίζουμε και αν συνεχίσουμε τη διαδικασία μέχρι το τέλος. Έτσι:

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$\rho(A-2I)^2 = 1$ ήδη σταματάμε, $\nu_2 = 3-1 = 2$

$\nu_2 - \nu_1 = 1$ Άρα υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα στον $N_2$ και δεν ανήκει στον $N_1$. Από αυτό το ιδιοδιάνυσμα δημιουργείται αλυσίδα (μήκους 2) γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. (Δεν χρειάζεται να υπολογισθούν τα ιδιοδιανύσματα σ' αυτή τη μέθοδο) Η μοναδική, μήκους 2, αλυσίδα επιβεβαιώνει το ότι υπάρχει ένας μόνο πίνακας Jordan διάστασης $2\times 2$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$ επειδή έχει πολλαπλότητα 1 αντιστοιχεί υποπίνακας Jordan διάστασης 1

συνέχεια →

Τελικά ο πίνακας Jordan του πίνακα A είναι

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{οπότε}$$

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|c} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{t} \end{array}\right] \qquad (1)$$

Από τη μέθοδο Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t)\, A^i \qquad (2)$$

και

$$e^{Jt} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t)\, J^i \qquad (3)$$

Δεδομένου ότι οι πίνακες A και J έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές τότε ικανοποιούνται τα ίδια $c_i(t)$ στις σχέσεις (2) και (3).

Η μεθοδολογία είναι:

- Υπολογίζουμε τα $c_i(t)$ από τις εξισώσεις (3).
- Χρησιμοποιούμε τα $c_i(t)$ για να υπολογίσουμε το $e^{At}$ στην (2).

Έχουμε λοιπόν:

χάριν συντομίας γράφουμε $c_i(t) = c_i$

$$(2) \Rightarrow e^{Jt} = \sum_{i=0}^{2} c_i J^i =$$

(δες στο τέλος για εξήγηση)

$$= c_0 I + c_1 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] + c_2 \left[\begin{array}{cc|c} 2^2 & \frac{2 \cdot 2^1}{1!} & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1^2 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} c_0+2c_1+4c_2 & c_1+4c_2 & 0 \\ 0 & c_0+2c_1+4c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_0+c_1+c_2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

συνέχεια →

Από (1),(4) $\Rightarrow$

$$e^{2t} = c_0 + 2c_1 + 4c_2 \quad (5)$$
$$te^{2t} = c_1 + 4c_2 \quad (6)$$
$$e^{t} = c_0 + c_1 + c_2 \quad (7)$$

$(5)-(6) \Rightarrow e^{2t} - te^{2t} = c_0 + c_1 \quad (8)$

$(7) \xRightarrow{(8)} e^{t} = e^{2t} - te^{2t} + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = e^{t} - e^{2t} + te^{2t}} \quad (9)$

$(6),(9) \Rightarrow te^{2t} = c_1 + 4e^{t} - 4e^{2t} + 4te^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = -4e^{t} + 4e^{2t} - 3te^{2t}} \quad (10)$

$(7),(9),(10) \Rightarrow \boxed{c_0 = 4e^{t} - 3e^{2t} + 2te^{2t}} \quad (11)$

Οπότε $(2) \Rightarrow e^{At} = \sum_{i=0}^{2} c_i A^i = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2$

Αλλά $c_0 I = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \end{bmatrix}$, $c_1 A = \begin{bmatrix} 2c_1 & c_1 & 4c_1 \\ 0 & 2c_1 & 0 \\ 0 & 3c_1 & c_1 \end{bmatrix}$

$$c_2 A^2 = c_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c_2 & 16c_2 & 12c_2 \\ 0 & 4c_2 & 0 \\ 0 & 9c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$e^{At} = \begin{bmatrix} c_0+2c_1+4c_2 & c_1+16c_2 & 4c_1+12c_2 \\ 0 & c_0+2c_1+4c_2 & 0 \\ 0 & 3c_1+9c_2 & c_0+c_1+c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Συνέχεια $\rightarrow$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^{t}+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^{t}+3e^{2t} & e^{t} \end{bmatrix}$$

---

(*)

Γενικά ισχύει:

$$J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \frac{k(k-1)\lambda^{k-2}}{2!} & \cdots \\ 0 & \lambda^k & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} & \cdots \\ & \underline{0} & \ddots & \frac{k\lambda^{k-1}}{1!} \\ & & & \lambda^k \end{bmatrix}$$